

**IDENTITÀ (o Legge) DEL PARALLELOGRAMMO**

Sia  $H$  sp. di Hilbert. Allora per ogni  $x$  e  $y$  in  $H$  vale

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

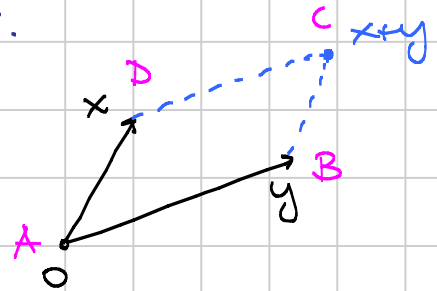
ci sono solo  
norme

**Dim** Espando e semplifico i doppi prodotti.

Interpr. geometrica

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

somma lung. diagonali = somma lung. lati



**Teorema** (Jordan - Frechet - von Neumann)

Se in uno spazio normato vale la legge del parallelogrammo, allora la norma deriva da un prod. scalare dato dalla formula

$$p(x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

IDENTITÀ DI  
POLARIZZAZIONE

In particolare: Banach + parallelogrammo  $\Rightarrow$  Hilbert

**Dim.** [Provare a fare la dim. da soli]

Devo verificare che la  $p(x, y)$  ha le proprietà del prod. scalare.

Step 0 Ovvietà

$$p(x, y) = p(y, x)$$

$$p(x, x) = \|x\|^2$$

$$p(x, 0) = 0$$

$$p(-x, y) = -p(x, y)$$

Step 1  $p(2x, y+z)$

$$p(2x, y+z) = \frac{1}{4} (\|2x+y+z\|^2 - \|2x-y-z\|^2)$$
$$= \frac{1}{4} (\|(x+y)+(x+z)\|^2 - \|(x-y)+(x-z)\|^2)$$

uso 2 volte  
parall.

$$= \frac{1}{4} (2\|x+y\|^2 + 2\|x+z\|^2 - \cancel{\|y-z\|^2} - 2\|x-y\|^2 - 2\|x-z\|^2 + \cancel{\|y-z\|^2})$$

$$= 2p(x, y) + 2p(x, z)$$

[Ho ottenuto l'additività con dei 2 in giro]

Step 2 Uso rel. prec. con  $z=0$  e ottengo, grazie a  $p(x, 0)=0$ ,

$$p(2x, y) = 2p(x, y)$$

e quindi anche

$$p(2x, y+z) = 2p(x, y+z)$$

Ma allora

$$2p(x, y+z) = p(2x, y+z) = 2p(x, y) + 2p(x, z)$$

e semplificando ho l'additività.

Step 3 Devo dim. che  $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$

- vero per  $\lambda = 0, 1, 2$
- vero per  $\lambda \in \mathbb{N}$  (additività + induzione)
- vero per  $\lambda \in \mathbb{Z}$  (posso portare il segno - fuori)

• vero per  $\lambda \in \mathbb{Q}$  perché se  $\lambda = \frac{m}{n}$ , allora

$$n p\left(\frac{m}{n} x, y\right) = p(\underbrace{mx}_{n \text{ dentro}}, \underbrace{y}_{n \text{ fuori}}) = n p(x, y)$$

Divido per  $n$  ed è ok.

• Occorre conquistare  $\mathbb{R}$ . Considero, fissati  $x$  e  $y$ , le due funzioni

$$\lambda \rightarrow \lambda p(x, y)$$

$$\lambda \rightarrow p(\lambda x, y)$$

Coincidono in  $\mathbb{Q}$ . Se fossero continue...

La prima è banalmente continua. La seconda è

$$p(\lambda x, y) = (\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2) \cdot \frac{1}{4}$$

Basta dim. che  $\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|^2$  è continua (l'altra idem)

$$\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|$$

e questo segue da

$$|\|\lambda_1 x + y\| - \|\lambda_2 x + y\|| \leq \|(\lambda_1 - \lambda_2)x\| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x\|$$

per ogni  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  in  $\mathbb{R}$ , da cui la tesi.

— o — o —

### PROIEZIONE SU UN CONVESSO CHIUSO

Setting :

- $H$  spazio di Hilbert
- $K \subseteq H$  sottosistema convesso e chiuso (forte)
- $x_0 \in H$  pto dato.

Risolvere

$$\min \{ \text{dist}(x_0, y) : y \in K \}$$

$\|x_0 - y\|$

Teorema Siano  $H$  e  $K$  come sopra

- (1) Esistenza Per ogni  $x_0 \in H$  esiste il minimo di sopra
- (2) Unicità Per ogni  $x_0 \in H$  esiste un unico p.to di min.  $y_0 \in K$ .  
D'ora in poi

$$y_0 =: P_K(x_0)$$

↑ proiezione di  $x_0$  su  $K$

- (3) Caratterizzazione  $P_K(x_0)$  è l'unico p.to  $y_0 \in K$  tale che

$$\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

- (4) 1-lipschitzianità Vale che  $P_K$  è 1-lip., cioè

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall (x_1, x_2) \in H^2$$

Interpr. geom. della (3) L'angolo fra  $x_0 - y_0$  e  $y - y_0$  è sempre ottuso.

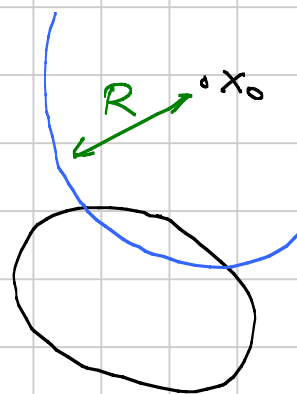
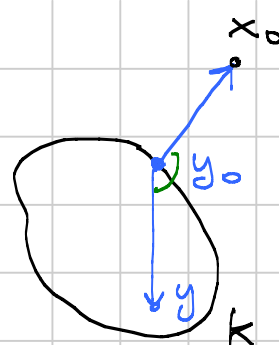
Dim (o) Esistenza nel caso finito dimensionale

Prendo una palla centrata in  $x_0$  e abbastanza grande da intersecare  $K$ : sia  $\bar{B}(x_0, R)$   
↑ chiusa

La battaglia per il min si gioca in  $K \cap \bar{B}(x_0, R)$ , che è chiuso + lim. e quindi compatto

(basta che  $K$  sia chiuso)

Ora non ho + le palle compatte.



(1) Esistenza Pongo  $I = \sup \{ \|x_0 - y\| : y \in K \}$   
 e prendo  $\{y_n\}$  una succ. infinita.  
 Spero sia di Cauchy che così converge

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x_0) - (y_m - x_0)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - \|y_n + y_m - 2x_0\|^2 \\ &= 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\left\| \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in K} - x_0 \right\|^2 \end{aligned}$$

Fisso  $\varepsilon > 0$ . Allora, se  $n$  ed  $m$  sono abbastanza grandi

$$\|y_n - x_0\|^2 \leq I + \varepsilon \qquad \|y_m - x_0\|^2 \leq I + \varepsilon$$

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x_0 \right\|^2 \geq I \quad (\text{questo sempre})$$

e quindi

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\cancel{I} + \varepsilon) + 2(\cancel{I} + \varepsilon) - 4\cancel{I} = 4\varepsilon$$

e questo dimostra che  $\{y_n\}$  è di Cauchy e  $y_n \rightarrow y_\infty \in K$   
↑  
per chiusura

(2) Unicità Due divi.

• Supponiamo per assurdo che  $y_1$  e  $y_2$  siano 2 p.ti di un'U.  
 Allora  $y_1, y_2, y_1, y_2, y_1, y_2, \dots$   
 è succ. infinita, dunque di Cauchy per p.to prec.

• Conto precedente con  $y_1$  e  $y_2$  e  $\varepsilon = 0$  produce

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0.$$

### (3) Caratterizzazione

Ci sono due cose da dimostrare

- Se  $y_0$  è p.to di min., allora verifica la caratterizzazione.



Prendo  $y \in K$  qualunque e osservo che

$$ty + (1-t)y_0 \in K \quad \forall t \in [0,1]$$

lunque

$$\begin{aligned} \cancel{\|x_0 - y_0\|^2} &\leq \|x_0 - ty - (1-t)y_0\|^2 \\ &= \|(x_0 - y_0) - t(y - y_0)\|^2 \\ &= \cancel{\|x_0 - y_0\|^2} - 2t \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle + t^2 \|y - y_0\|^2 \end{aligned}$$

$$2t \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq t^2 \|y - y_0\|^2 \quad (t > 0)$$

Facendo  $t \rightarrow 0$  ho la tesi.

- Se  $y_0$  verifica la caratt., allora è p.to di min.  
Preso un altro  $y \in K$  vale

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\|^2 &= \|x_0 - y_0 + y_0 - y\|^2 \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + \underbrace{2 \langle x_0 - y_0, y_0 - y \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\|y_0 - y\|^2}_{\geq 0} \\ &\quad \text{(ipotesi cui seguo -)} \\ &\geq \|x_0 - y_0\|^2 \end{aligned}$$

con uguaglianza se e solo se  $y_0 = y$ .

(4) Lipschitzianità Siano  $x_1 \in H$  e  $x_2 \in H$

$$\langle x_1 - P_K x_1, y - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

$$\forall y \in K$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, y - P_K x_2 \rangle \leq 0$$

$$\forall y \in K$$

$$\langle x_1 - P_K x_1, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

①

$$\langle x_2 - P_K x_2, P_K x_1 - P_K x_2 \rangle \leq 0$$

②

$$\langle P_K x_2 - x_2, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

③

↗ stessa

Sommo ① + ③ e ottengo

$$\langle (x_1 - x_2) - (P_K x_1 - P_K x_2), P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

Espando

$$\|P_K x_2 - P_K x_1\|^2 \leq - \langle x_1 - x_2, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle$$

$$\leq \|x_1 - x_2\| \cdot \|P_K x_2 - P_K x_1\|$$

Se posso semplifico, se non posso ancora meglio.

— 0 — 0 —