

Prop. Sia $\mu(X) < +\infty$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X)$ con $p \in [1, +\infty]$.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ limitata in $L^p(X)$

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ debole $L^1(X)$ (la più debole di tutte)

Tesi: $f_\infty \in L^p(X)$ e $f_n \rightarrow f_\infty$ debole L^p .

Dim. $\int_X |f_\infty(x)|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x)|^p d\mu < +\infty$
 ↑
 teorema SCI con $\varphi(x) = |x|^p$
 ↑
 per ipotesi (i)
 truncamento +
 conv. dominata

Questo dimostra che $f_\infty \in L^p$.

Ora basta osservare che $L^\infty(X)$ è denso in $L^q(X)$ e usare il fatto che la conv. deb. in L^p basta testarla su un denso di L^q .

— o — o —

Dim. teorema misterioso nel caso $\mu(X) < +\infty$ e $p \geq 2$

Sia $\{f_n\}$ limitata in $L^p(X)$. Poiché $p \geq 2$ e $\mu(X) < +\infty$, allora $\{f_n\}$ è limitata in $L^2(X)$.

Ma allora per teoria degli spazi di Hilbert esiste

$f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ debole in $L^2(X)$
 quindi anche

$f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ debole in $L^1(X)$

Per la Prop. precedente $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ debole in $L^p(X)$.
 — o — o —

Oss. Come puoi dimostrarlo in generale, seguendo l'idea Hilbertiana.

- Prendo un numerabile denso in $L^q(X)$ (abbastanza facile nei casi standard)
- Con procedimento diagonale ottengo f_{n_k} tale che

$$\int_{\mathbb{X}} f_{n_k}(x) g(x) d\mu \rightarrow \underbrace{L(g)}_{\text{funzione misteriosa di } g} \quad \forall g \text{ denso}$$

- Osservo anche che L è lineare rispetto a g .
- Sarebbe un teo. misterioso che dica che

$$L(g) = \int_{\mathbb{X}} f_0(x) g(x) d\mu$$

per una certa opportuna $f_0(x) \in L^p$. A quel p.to avrei finito (limit. + conv. deb. testata su un denso ...)

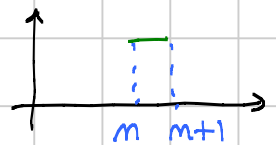
Morale: serve un TEO. di RAPPRESENTAZIONE (3^a parte del corso).

— o — o —

METADISCORSO SUI TEOREMI DI COMPATTEZZA

I nemici della convergenza forte sono 3

① Fughe orizzontali : $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$



② Fughe verticali : $f_n(x) = n$

③ Oscillazioni furiose : $f_n(x) = \sin(nx)$

Teo. Ascoli - Arzelà (versione Analisi 2)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due sp. metrici.

Sia $f_n : X \rightarrow Y$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che

(i) X compatto (evita fughe orizz.)

(ii) per ogni $x \in X$ esiste $K \subseteq Y$ compatto (a priori dipende da x)
tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{evita fughe vert.})$$

(iii) equicontinuità (evita oscillazioni furiose)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in B_X(x, \delta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(y) \in B_Y(f_n(x), \varepsilon)$$

$\uparrow$ non dipende da n

Allora esiste s.succ. che conv. unif.

I nemici della conv. debole sono solo le fughe verticali.

Teo standard: limitazione da qualche parte $\Rightarrow$ conv. debole
in qualche senso.

Esempio $f_n(x) = 1_{[n, n+1]}$ converge debolmente da
qualche parte? $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$

Dico che $f_n(x) \rightarrow 0$ debole in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p > 1$.

• Per $p=1$ non è vero perché dovrei scontrarmi anche
con $g(x) \equiv 1$ (che sta in $L^\infty(\mathbb{R})$)

• Per $p > 1$ ho $q < +\infty$ quindi serve che

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_n(x) g(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{puntuale dominato}}} dx \rightarrow 0$$

[Dettagli aggiunti dopo video:]

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n g \right| \leq \int_n^{n+1} |g| \leq \int_n^{n+1} |g| \leq \left\{ \int_n^{n+1} |g|^p \right\}^{1/p}$$

$\uparrow$ Hölder

per conv. puntuale dominata]

Esercizio $\min \left\{ \int_0^2 (u^4 + \sin u) : u(0) = 3, u(2) = 7 \right\}$

[1] Formulazione debole

Possibilità 1: in $W^{1,4}((0,2))$ così siamo a valori in $\mathbb{R}$

Possibilità 2: in $H^1((0,2))$ ammettendo il valore $+\infty$.

↓ (va bene anche con crescite più strane delle potenze)

[2] Compattzza Da $F(u_n) \leq M$ ottengo $\|u_n\|_{L^4} \leq M'$

Possibilità 1: teo. rist. $\Rightarrow u_{n_k} \rightarrow v_\infty$ debole L^4

Possibilità 2: $\|u_n\|_{L^4} \leq M' \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M''$ (misura finita)

$\Rightarrow u_{n_k} \rightarrow v_\infty$ debole L^2

Al solito modo: $\|u_{n_k}\|_{L^4} \leq M' \Rightarrow \|u_{n_k}\|_{L^\infty} \leq M'''$
↑
DBC

[3] sc In ogni caso $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ debole L^1
e questo basta per concludere che

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^2 u_{n_k}(x)^4 dx \geq \int_0^2 u_\infty(x)^4 dx$$

Sulla parte di funzione segue dalla conv. unif.

Oss. Per fare compattzza basta assumere

$$L(x, s, p) \geq A |p|^\alpha - B |s|^\beta - C$$

$$A > 0$$

$$\alpha > 1$$

$$\beta < \alpha$$

[4] Regolarità Sia un pto di min in H^1 o $W^{1,4}$

[4.1] ELE debole come al solito $\forall v \in C_c^\infty$

$$\int_0^2 4 u_0(x)^3 \tilde{v}(x) dx = - \int_0^2 \cos(u_0(x)) v(x) dx$$

da cui $(4 u_0^3)' = \cos(u_0)$

[4.2] Guadagnare le prime derivate

$$u_0 \in W^{1,4} \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow \cos(u_0) \in C^0$$

$$\Rightarrow 4 u_0^3 \in C^1 \Rightarrow \text{abbiamo un problema}$$

$$\text{Di sicuro } u_0^3 \in C^0 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow u_0 \in C^1$$

$\uparrow$
 $\sqrt[3]{x}$ è cont.

Andiamo avanti

basta limitarlo

$$u_0 \in C^1 \Rightarrow \text{RHS} \in C^1 \Rightarrow \text{RHS} \in \text{Lip} \Rightarrow u_0^3 \in \text{Lip}$$

$\uparrow$

$$\left. \begin{array}{l} u_0^3 \in \text{Lip} \\ u_0 \in C^0 \end{array} \right\} \Rightarrow u_0 \in \frac{1}{3}\text{-H\"older} \Rightarrow u_0 \in C^{1/3}$$

$\uparrow$
Analisi 1

Più avanti di così non si può.

$$(4 u_0^3)' = \cos u_0 \rightsquigarrow$$

$$12 u_0^2 u_0' = \cos u_0$$

$\uparrow$
Dove si annulla,
possiamo essere
guai per u_0