

CONVERGENZA DEBOLE IN L^p

Setting : $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura
 $\uparrow$ σ -algebra
 $\uparrow$ misura ≥ 0 num. additiva
 (il valore $+\infty$ è ammesso)

Esempio modello : aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con la misura di Lebesgue

Def. (convergenza debole) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura e sia $p \in [1, +\infty]$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X)$ una succ. e sia $f_\infty \in L^p(X)$. Sia q l'esponente coniugato, cioè

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{con ovvio significato se } p = 1, +\infty)$$

Si dice che

$$\begin{array}{llll} f_n \rightarrow f_\infty & \text{in } L^p(X) & \text{se } p \in [1, +\infty) \\ f_n \xrightarrow{*} f_\infty & \text{in } L^\infty(X) & \text{se } p = +\infty \\ & \uparrow \text{ragione misteriosa} \end{array}$$

Se

$$\int_X f_n(x) g(x) d\mu \rightarrow \int_X f_\infty(x) g(x) d\mu \quad \forall g \in L^q(X)$$

Oss. Se $p=2$, allora $q=2$ ed è la sdita debole L^2 .

Brutalmente: convergenza debole = passare al limite nello scatto (duality pairing) tra L^p e L^q .

— o — o —

Caso speciale : $\mu(X) < +\infty$

Dati $p_1 < p_2$ abbiamo che $L^{p_1} \supseteq L^{p_2}$, cioè

$$f \in L^{p_2} \Rightarrow f \in L^{p_1}$$

In questo caso

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_2} \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_1}$$

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_2} \Rightarrow \int f_n g \rightarrow \int f_\infty g \text{ per ogni } g \in L^{q_2}$$

$$\Rightarrow \int f_n g \rightarrow \int f_\infty g \text{ per ogni } g \in L^{q_1} \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_2}$$

↑
perché $q_1 > q_2$, equivalenti
 $L^{q_1} \subseteq L^{q_2}$

Morale: la convergenza debole L^1 è la più debole di tutte se $\mu(X) < +\infty$ (perché è quella che ha meno funzioni test).

— o — o —

Prop. Sia (X, m, μ) e sia p come nella definizione.

Sia $W \subseteq L^q(X)$ tale che $\text{Span } W$ è denso.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ sia LIMITATA in $L^p(X)$

(ii) esiste $f_\infty \in L^p(X)$ tale che

$$\int_X f_n(x) g(x) d\mu \rightarrow \int_X f_\infty(x) g(x) d\mu \quad \forall g \in W$$

Allora davvero $f_n \xrightarrow{(*)} f_\infty$ in $L^p(X)$.

Dim. Sia M t.c. $\|f_n\|_p \leq M$

Sia $g \in L^q(X)$ qualunque

$$|\int f_n g - \int f_\infty g| = |\int (f_n - f_\infty) g|$$

$$\leq |\int (f_n - f_\infty) g_\varepsilon| + |\int (f_n - f_\infty) (g - g_\varepsilon)|$$

$$\leq |\int (f_n - f_\infty) g_\varepsilon| + \|f_n\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} + \|f_\infty\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q}$$

Rigorosamente:

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo $g_\varepsilon \in \text{Span}(W)$ tale che

$$M \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\|f_\infty\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

(ci riesco per densità)

- ricevuto g_ε dal p.to prec., scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\int (f_n - f_\infty) g_\varepsilon d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq m_0$$

(ci riesco per ipotesi visto che $g_\varepsilon \in \text{Span}(W)$)

- il conto sopra mi dice che

$$|\int (f_n - f_\infty) g d\mu| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

che è quello che voglio.

Altro modo di sistemare rigorosamente: dal conto di sopra, fisso $g_\varepsilon \in \text{Span } W$ a caso, e faccio il limsup a dx e sx

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\int (f_n - f_\infty) g d\mu| \leq \{M + \|f_\infty\|_{L^p}\} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q}$$

Dal momento che questa vale per ogni $g_\varepsilon \in \text{Span}(W)$ ho che il limsup = 0 e quindi 😊

— 0 — 0 —

Esempio 1

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

Allora

$$f_n \rightarrow 0 \quad \text{in } L^p((0, \pi)) \quad \text{per ogni } p \in (1, +\infty]$$

Dim Basta scontrarsi con le caratteristiche di intervalli, le quali sono dense in $L^q((0, \pi))$ per ogni $q < +\infty$

Teorema misterioso (Il mistero finisce nella 3ª parte del corso)

Sia (X, m, μ) spazio di misura, e sia $p \in (1, +\infty]$
↑ escluso

Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X)$ una successione LIMITATA.

Allora esiste $n_k \rightarrow +\infty$ succ. di naturali crescente, ed esiste $f_\infty \in L^p(X)$ tale che

$$f_{n_k} \xrightarrow{(*)} f_\infty \quad \text{in } L^p(X)$$

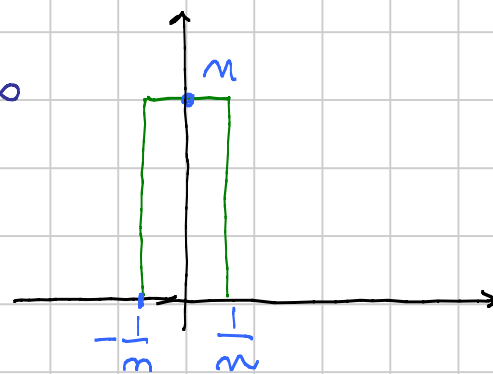
↑ aggiunto dopo video

Oss. Per $p=1$ non c'è nessuna speranza

Esempio In $L^p((-1, 1))$ consideriamo $f_n(x)$ come in figura.

Queste sono limitate in $L^1((-1, 1))$,
ma non negli L^p per $p > 1$.

Non può avere s.succ. che conv.
debolmente in L^1 . Dovrebbe succedere
che



$$\int_{-1}^1 f_n(x) g(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 f_\infty(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^\infty$$

e in particolare $\forall g \in C_c^\infty((-1, 1))$.

Ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n g(x) dx = 2g(0)$$

se g è continua. Ma allora dovrebbe essere

$$\int_{-1}^1 f_\infty(x) g(x) dx = 2g(0) \quad \forall g \in C_c^\circ$$

il che è impossibile (vedi lezione iniziale sui Sobolev).

Teorema (Per semplicità nel caso $\mu(X) < +\infty$)

[e Limitata dal basso: dopo video]

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, e sia $f_n \rightarrow f_\infty$ debole in $L^1(X)$ (che è la più debole di tutte).

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_X \varphi(f_\infty(x)) d\mu.$$

Dim Supponiamo di sapere che $\varphi \in C^1$ e φ' è Limitata

Allora la dim. è la solita 😊: partiamo da

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b$$

e scriviamo

$$\int_X \varphi(f_n(x)) d\mu = \int_X \varphi(f_\infty(x) + f_n(x) - f_\infty(x)) d\mu$$

$$\geq \int_X \varphi(f_\infty(x)) d\mu + \int_X \underbrace{\varphi'(f_\infty(x))}_{\in L^\infty(X)} \underbrace{(f_n(x) - f_\infty(x))}_{\rightarrow 0 \text{ debole } L^1} d\mu$$

Per il caso generale serve un Lemma.

Lemma Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora esiste una famiglia $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per $\varepsilon > 0$ t.c.

(i) ogni φ_ε è convessa, C^1 , con φ'_ε limitata (limitazione dipendente da ε)

(ii) $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(iii) fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $\varphi_\varepsilon(x)$ è deb. decresc. in ε .

Dim. teo., dato il Lemma

Prendo le φ_ε , e per ogni $\varepsilon > 0$ osservo che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(f_n(x)) d\mu$$

Ma allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(f(x)) d\mu \quad \forall \varepsilon > 0$$

Concludo con Beppo-levi facendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ RHS.

— o — o —

