

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 3 \quad \text{DBC} \\ \dot{u}(2) = 0 \quad \text{NBC} \end{cases}$$

$$\min \left\{ \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) : u(0) = 3 \text{ e basta} \right\}$$

↑ Non metto $\dot{u}(2) = 0$

Funzioniamo [1], [2] e [3] come sempre (basta una DBC per avere limitazione su u) e quindi esiste p.to di min $u_0 \in H^1$ che verifica $u_0(0) = 3$.

[4] Regolarità (e nascita della NBC)

[4.1] Usando $v \in C_c^\infty((0,2))$ otteniamo

$$\int_0^2 \dot{u}_0(x) \dot{v}(x) dx = - \int_0^2 \arctan(u_0(x)) v(x) dx \quad (*)$$

da cui deduciamo che $(\dot{u}_0)' = \arctan u_0$

[4.2] Come prima otteniamo $u_0 \in C^2([0,2])$.

Ora possiamo usare delle v che non si annullano in $x=2$. Tornando nella (*), dove ora tutto è classico, int. per parti e arriviamo a

$$[u_0(x) v(x)]_0^2 = 0 \quad (\text{il resto è andato via})$$

$$u_0(2) v(2) - 0 = 0 \quad \leadsto \quad \dot{u}_0(2) = 0 \quad \leadsto \quad \text{NBC on the road.}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 7 \end{cases}$

Ricordo che le NBC sono del tipo $L_p = 0$. Volei tanto $L_p = p - 7$

Uso $L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 - 7p + g(s)$

$(L_p)' = L_s$ diventa $(\dot{u} - 7)' = \arctan u$
 $\ddot{u} = \arctan u$

[1] Come sempre

[2] Compattezza Per avere la stima sulla derivata serve

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{4} p^2 - A$$

[3] SCI Si usa che, se $u_n \rightharpoonup u$ al solito modo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \dot{u}_n(x)^2 dx \geq \int_0^2 \dot{u}_\infty(x)^2 dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_n(x)}_{\text{prod. scalare tra } \dot{u}_n \text{ e } \dot{u}_\infty} dx = \int_0^2 \dot{u}_\infty(x) dx$$

prod. scalare tra $\dot{u}_n$ e $\dot{u}_\infty \equiv 1$.

[4] Regolarità come sempre. Dall'integrazione per parti nasce

$$L_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = 0 \text{ per } x=2, \text{ cioè } \dot{u}_0(2) = 7$$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \dot{u}(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 7 \end{cases}$$

Due approcci : $\rightarrow$ cambio variabile
 $\rightarrow$ riadatto L_p

① Cambio variabile. Cerco una funzione $u_1(x)$ che rispetti le NBC strane

$$u_1(x) = 3x + x^2 \quad \dot{u}_1(x) = 3 + 2x$$

Vedo cosa risolve

$$w(x) = u(x) - u_1(x)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}(x) &= \ddot{u}(x) - \ddot{u}_1(x) = \arctan(u(x)) - 2 \\ &= \arctan(w(x) + u_1(x)) - 2 \end{aligned}$$

Morale: w risolve

$$\begin{cases} \ddot{w} = \arctan(w + 3x + x^2) - 2 \\ \dot{w}(0) = 0 \\ \dot{w}(2) = 0 \end{cases}$$

Oss. Se w risolve il problema sopra, allora

$$u(x) = w(x) + 3x + x^2$$

risolve il problema originario.

Considero

$$F(w) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{w}^2 + g(w + 3x + x^2) - 2w \right) dx$$

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + g(s + 3x + x^2) - 2s$$

Osservo che ELE + NBC sono quello che voglio.

1) Ok come sempre

esponente < 2

2) Compattezza

I soliti conti seguono da $L(x, s, p) \geq \frac{1}{2}p^2 - A|s|$ ↓

Da qui segue stima su $\|u_m\|_{L^2}$.

Ora servirebbe una stima su u . Non avendo DBC posso contare solo su stime integrali, e NON le posso ottenere perché

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s + 3x + x^2) - 2s = -\infty$$

↑
cresce come $\frac{\pi}{2}s$

Infatti: il pbm. di min. NON ha soluzione e l'inf. è $-\infty$
Basta usare $w_m(x) \equiv m$ e diventa

$$F(w_m) = \int_0^2 (g(m + 3x + x^2) - 2m) dx \rightarrow -\infty$$

per m grande diventa
negativo a piacere

Non è che il pbm. diff. NON può avere soluzione?

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \ddot{u}(0) = 3 \\ \ddot{u}(2) = 7 \end{cases}$$

lungh.
intern. ↓
p.to mist ↑

Lagrange: $\underbrace{\ddot{u}(2) - \ddot{u}(0)}_4 = 2 \cdot \underbrace{\ddot{u}(c)}_{\text{al max è } \frac{\pi}{2}}$

Anche qui se la giocano $\frac{\pi}{2}$ e 2

Se avessi avuto

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \dot{u}(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 5 \end{cases}$$

$$\leadsto L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + g(s + 3x + \frac{x^2}{2}) - 5$$

Da qui avevo che $L(x, s, p) \geq \frac{1}{20} |s| - A$

e quindi da $F(w_m) \leq M$ potevo dedurre

$$\int_0^2 |w_m(x)| dx \leq M'$$

da cui $|w_m(x_m)| \leq M''$ e via con Ascoli-Arzelà.
— o — o —

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \dot{u}(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 5 \end{cases}$$

② Riadatto L_p : vorrei $L_p(x, s, p) = p - 3 - x$
perché ponendo

$$L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) = 0 \quad \text{per } x = 0, 2$$

vergono le cond. richieste.

Quindi provo

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} (p - 3 - x)^2 + g(s)$$

Questa non va bene perché ELE diventa

$$(\dot{u} - 3 - x)' = \arctan u$$

$$\ddot{u} - 1 = \arctan u$$

servirebbe un -1 al RHS dove c'è L_s . Uso allora

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} (p - 3 - x)^2 + g(s) - s$$

Esempio di non unicità

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda \sin u \\ u(0) = \pi \\ u(\pi) = \pi \end{cases}$$

Una soluzione è evidente: $u(x) \equiv \pi$.

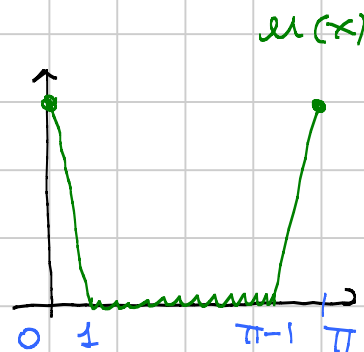
Dico che se λ è abbastanza grande positivo, allora non è unica

$$F(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \lambda \cos u \right) dx$$

Se λ è abbastanza grande, $u_0(x) \equiv \pi$ NON è il p.to di min. Infatti

$$F(u_0 \equiv \pi) = \int_0^\pi \lambda dx = \lambda\pi$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \int_{\pi-1}^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 \\ &\quad - \int_0^{\pi-1} \lambda \cos u - \int_{\pi-1}^1 \lambda \cos u \\ &\quad - \int_1 \lambda dx \end{aligned}$$



Questo cresce molto meno di $\lambda\pi$ per λ grande