

Approccio variazionale alle equazioni differenziali

Esempio Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u & \text{eq. diff.} \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 7 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 7 \end{cases}} \right\} \text{DBC}$$

Problema: discutere esistenza e unicità di $u \in C^2([0,2])$ che risolva eq. diff. + DBC.

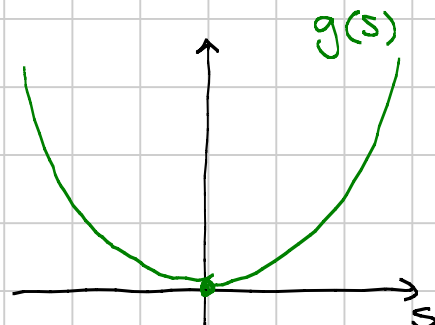
Strategia: inventarsi un pbm. di min. di cui l'eq. sia ELE

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \arctan u \\ (L\varphi)' &= Ls \end{aligned}$$

Considero una primitiva di $\arctan$

$$g(s) := \int_0^s \arctan t \, dt$$

$\forall s \in \mathbb{R}$



$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s)$$

e il problema di minimo

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right)}_{F(u)} : u \in \overset{\uparrow}{C^2} \text{ ? } \quad u(0)=3, u(2)=7 \right\}$$

Applico il metodo diretto.

1 Formulazione debole

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 \frac{1}{2} u^2 + g(u) \quad u \in H^1((0,2)) = W^{1,2}((0,2))$$

Osservo che l'integrale ha senso e viene $\in \mathbb{R}$
che le DBC hanno senso in H^1 .

2 Compattezza Consideriamo la noz. di conv.

- debole L^2 sulle derivate
- unif. sulle funzioni in $[0,2]$

Data una $\{u_n\} \subseteq H^1$ con

$$\hat{F}(u_n) \leq M$$

voglio trovare s. succ. t.c.

$$\begin{array}{ll} u_{n_k} \rightarrow u_\infty & \text{unif. in } [0,2] \\ i_{n_k} \rightarrow i_\infty & \text{debole } L^2 \end{array}$$

- Stima sulle derivate: immediata da $L(x,s,p) \geq \frac{1}{2}p^2$
 $\uparrow g(s) \geq 0$ sempre
- Stima sulle funzioni:

→ equi $\frac{1}{2}$ -Hölder grazie alla stima sulle derivate

→ equi L^∞ grazie a DBC + equi-Hölder

Grazie alla stima sulle derivate esiste $i_{n_k} \rightarrow v_\infty$
(comp. debole delle palle)

Grazie alla stima sulle funzioni esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif.
(Ascoli-Arzelà)

Al solito modo i_∞ esiste ed è v_∞ .

Inoltre u_∞ soddisfa DBC per conv. unif.

[3] SCI Supponiamo $u_n \rightharpoonup u_\infty$ secondo la nozione

$$\bullet \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 u_n(x)^2 dx \geq \int_0^2 u_\infty(x)^2 dx$$

(SCI debole della norma)

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 g(u_n(x)) dx = \int_0^2 g(u_\infty(x)) dx$$

(conv. unif. + continuità della $g(s)$)

A questo p.to sappiamo che esiste

$$\min \{ \hat{F}(u) : u \in H^1((0,2)) + \text{DBC} \}$$

[4] Regolarità Sia u_0 un qualunque p.to di min.

[4.1] Ricavo ELE debole. Data $v \in C_c^\infty((0,2))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{F}(u_0 + tv) &= \frac{d}{dt} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} (u_0 + tv)^2 + g(u_0 + tv) \right] dx \\ &= \int_0^2 (u_0 + tv) \dot{v} + \arctan(u_0 + tv) v \end{aligned}$$

Per fare questo conto serve una dominazione della presunta derivata

$$\underbrace{|u_0(x) + tv(x)| \cdot |\dot{v}(x)|}_{\leq \text{cost}} + \underbrace{|\arctan(u_0 + tv)| \cdot |v(x)|}_{\leq \text{cost}} \leq \frac{H}{2}$$

$$\underbrace{|u_0(x)|}_{\in L^1} + \underbrace{|tv(x)|}_{\leq \text{cost}} \quad t \in (-1,1)$$

Dall'essere u_0 p.to di min. segue

$$\int_0^2 \underbrace{u_0(x)}_f \underbrace{\dot{v}(x)}_{\dot{\varphi}} dx = - \int_0^2 \underbrace{\arctan(u_0(x))}_g \underbrace{v(x)}_{\varphi} dx \quad \forall v \in C_c^\infty$$

Dalla def. di derivata debole segue che

$$\underbrace{(u_0)'}_{\text{deriv. deb. della deriv. debole}} = \arctan u_0$$

4.2 Guadagno C^2 .

$$u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0([0,2]) \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow u_0 \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^2 \quad \text{😊}$$

4.3 Bootstrap fino a C^∞

Conclusione: il problema iniziale ha almeno una soluzione

UNICITÀ Claim: La soluzione dell'eq. iniz. è unica

Achtung! Il min. è unico, quindi la soluz. è unica.

NO: potrebbero esserci soluzioni che non arrivano da minimi (ELE potrebbe essere soddisfatta da p.ti di max o altri stazionari)

1° approccio **via funzionale**

① Dimostro che tutte le sol. dell'eq. sono p.ti di min.

② Dimostro che il p.to di min. è unico

Entrambe seguono dalla convessità.

Sia u_0 soluz. dell'eq. Calcolo $F(u)$ con $u \in H^1$ qualunque

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_0 + v) = \int_0^2 \frac{1}{2} (\dot{u}_0 + \dot{v})^2 + g(u_0 + v) \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \dot{u}_0^2}_{\text{ho usato } g(a+b) \geq g(a) + g'(a)b} + \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 + \int_0^2 g(u_0) + \int_0^2 \arctan u_0 \cdot v}_{\text{ho usato } g(a+b) \geq g(a) + g'(a)b} \\ &= \underbrace{F(u_0)}_{=0 \text{ perché } u_0 \text{ risolve ELE}} + \underbrace{\int_0^2 (\dot{u}_0 \dot{v} + \arctan u_0 v)}_{=0 \text{ perché } u_0 \text{ risolve ELE}} + \frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 \\ &\geq F(u_0) \end{aligned}$$

con uguaglianza se e solo se $\dot{v} \equiv 0$
" " $v \equiv \text{cost}$

ma $\text{cost} = 0$ perché v si annulla al bordo.

2° approccio Guardo solo l'equazione.

Siano u e v due soluzioni. Allora

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \arctan u \\ \ddot{v} &= \arctan v \end{aligned}$$

Sottraggo: $\ddot{u} - \ddot{v} = \arctan u - \arctan v$

Moltiplico per $u - v$

$$(\ddot{u} - \ddot{v})(u - v) = \underbrace{(\arctan u - \arctan v)(u - v)}_{\geq 0 \text{ sempre perché } \arctan s \text{ è debol. crescente}}$$

Integro tra $[0, 2]$

$$\int_0^2 (\ddot{u} - \ddot{v}) (u - v) dx = \int_0^2 (\dots) (u - v) \geq 0$$

" per parti

$$-\underbrace{\int_0^2 (\dot{u} - \dot{v})^2}_{\leq 0}$$

(il termine di bordo viene 0 grazie a $u - v$)

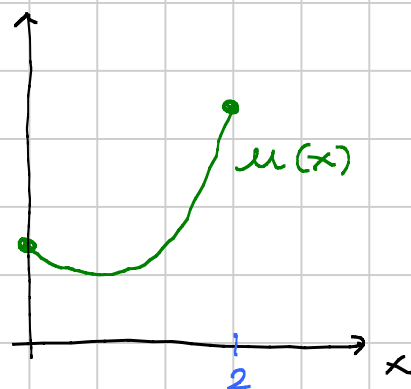
L'unica possibilità è che sia tutto = 0, da cui $u = v$

— 0 — 0 —

Come ci aspettiamo la soluzione?

Claim: u è convessa

$$\ddot{u} = \arctan u$$



Senza dim. che $u(x) \geq 0$ in $[0, 2]$.

Ci sono 2 modi

① Argomento di truncamento:
truncando rispondo sui due termini del funzionale



② Quando l'eq. : se diventa negativa, il minimo di u è assunto in un p.to $x_0 \in (0, 2)$

↑ ↑

Ma allora $\ddot{u}(x_0) \geq 0$ e non è possibile se $u(x_0) < 0$.

In realtà $u(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Se $u(x_0) = 0$, allora x_0 sarebbe un p.to di min., quindi $\ddot{u}(x_0) = 0$, ma allora u risolverebbe

$$\ddot{u} = \arctan u$$

$$u(x_0) = 0$$

$$\ddot{u}(x_0) = 0$$

} Pbm. di Cauchy di Analisi 2 che ha soluzione unica $u(x) \equiv 0$.

— 0 — 0 —