

Esempio 1 $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} u^2 + u \sin u \right] dx \quad u(0) = 3, u(2) = 7$

① Formulazione debole in H^1 è standard

② $\hat{F}(u_n) \leq M$ vogliamo dimostrare che

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ unif. in } [0, 2]$$

$$\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ debole } L^2$$

Il pto chiave è ottenere $\|\dot{u}_\infty\|_{L^2} \leq M'$. Poi è uguale.
(a voce nel video).

Guaio: la "parte di funzione" u su u non è limitata dal basso.

Come sempre $|u_n(y) - u_n(x)| \leq \|\dot{u}_n\|_{L^2} |y - x|^{1/2}$ da cui

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(0)| + |u_n(x) - u_n(0)| \\ &\leq \underset{\downarrow \text{DBC}}{3} + \|\dot{u}_n\|_{L^2} \cdot 2^{\leftarrow 1/2} \quad \text{lunghezza interv.} \end{aligned} \quad \forall x \in [0, 2]$$

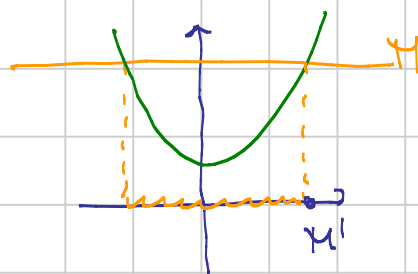
Ora

$$\begin{aligned} M &\geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_n(x)^2 + u_n(x) \sin(u_n(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - \int_0^2 |u_n(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - \underbrace{(3 + \sqrt{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2})}_{\text{bound } L^\infty \text{ di sopra}} \cdot 2 \quad \uparrow \text{lunghezza int.} \end{aligned}$$

Questa è diseq. di 2° grado nella incognita $\|\dot{u}_n\|_{L^2}$,
ed è soddisfatta per valori interi

Da questo otteniamo che

$$\|\dot{u}_m\|_{L^2} \leq M'$$



(Bastava ottenere $\Phi(\|\dot{u}_m\|_{L^2}) \leq M$ con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = +\infty)$$

Da qui in poi è come negli esempi precedenti

— o — o —

Che cosa abbiamo davvero usato?

$$L(x, s, p) \geq Ap^2 - B|s|^d - C$$

con $A > 0$ e $d < 2$.

$$M \geq \int_a^b L(x, u_m(x), \dot{u}_m(x)) dx$$

$$\geq A \int_a^b \dot{u}_m(x)^2 dx - B \int_a^b |u_m(x)|^d dx - \underbrace{C \int_a^b 1 dx}_{-C(b-a)}$$

$$\geq A \|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 - B(b-a) \|u_m\|_{L^\infty}^d - C(b-a)$$

$$\geq \underbrace{A \|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 - B(b-a) (|u_m(a)| + \|\dot{u}_m\|_{L^2} |b-a|^{1/2})^d}_{\Phi(\|\dot{u}_m\|_{L^2})} - C(b-a)$$

$\Phi(\|\dot{u}_m\|_{L^2}) \rightarrow +\infty$ per $\|\dot{u}_m\| \rightarrow \pm\infty$
perché $d < 2$.

Oss. Nel caso $d=2$ entrano in gioco i valori delle costanti

— o — o —

Esempio 2 Senza DBC

$$\min \left\{ \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + (u - \sin x)^6 : u \in C^1([0, 2]) \right\}$$

1) NO PBM

2) Solita nozione di conv.

$$\hat{F}(u) \leq M \Rightarrow \|u\|_{L^2}^2 \leq 2M \quad \text{☺}$$

Questo fornisce equi $\frac{1}{2}$ -Hölder sulle u , ma serve un bound uniforme e non ho DBC.

$$\hat{F}(u) \leq M \Rightarrow \int_0^2 (u(x) - \sin x)^6 dx \leq M$$

|| (Teo. media integrale)

$$2 \cdot (u(x_m) - \sin x_m)^6 \leq M$$

$\uparrow$ $\uparrow$ p.to misterioso

$\Rightarrow |u(x_m)| \leq M'$ e da qui concludo

$$|u(x)| \leq \underbrace{|u(x_m)|}_{\leq M'} + \underbrace{|u(x) - u(x_m)|}_{\leq \|u\|_{L^2} |x - x_m|^{1/2}}$$

$|b-a|^{1/2}$

Da qui tu poi è gratis.

Esempio 3

$$F(u) = \int_a^b [(\dot{u}^2 + \sin(u)) + u^4] dx$$

Vogliamo minimizzare in $C^1([a, b])$ senza DBCs.

1) Tranquillo

2) $L(x, s, p) \geq p^2 - 1 \Rightarrow$ stima su $\|u_m\|_{L^2}$

$$L(x, s, p) \geq s^4 - 1 \Rightarrow \int_a^b u_m(x)^4 dx \leq 4$$

$\Rightarrow$ bound unif. su $|u_m(x)|$ per teo. media integrale

3) SCI $\rightarrow$ ponte di funzione è gratis (conv. unif. $\rightarrow$ conv. degli integrali).

$\rightarrow$ Ponte di derivata: se $u_m \rightarrow u_\infty$, posso concludere

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b (u_m^2 + s u_m) dx \geq \int_a^b (u_\infty^2 + s u_\infty) dx$$

PAROLA MAGICA: convessità

Prop. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- di classe C^1
- convessa
- che verifica la stima $|\dot{\varphi}(x)| \leq Ax + B$.

Sia $\{v_m\} \subseteq L^2((a, b))$ una successione con

$$v_m \rightharpoonup v_\infty \quad (\text{debole } L^2)$$

Allora

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(v_m(x)) dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx$$

Dim Ponticelli dalla solita

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + b \varphi'(a) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(v_m(x)) dx &= \int_a^b \varphi(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_m(x) - v_\infty(x)}_b) dx \\ &\geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx + \int_a^b \varphi'(v_\infty(x)) (v_m(x) - v_\infty(x)) dx\end{aligned}$$

Se $\varphi'(v_\infty(x)) \in L^2$, l'ultimo termine $\rightarrow 0$ per def. di conv. debole.

L'appartenenza segue dal bound su $\varphi'(x)$

$$|\varphi'(v_\infty(x))|^2 \leq \underbrace{(A|v_\infty(x)| + B)}_0^2 \text{ non integrabile.}$$

Tornando all'esempio, basta verificare che

$$\varphi(p) = p^2 + \sin p$$

è convessa (banale calcolo di φ'')

4 Regolarità $\frac{d}{dt} \hat{T}(u_0 + tv)$

$$= \frac{d}{dt} \int_a^b (\dot{u}_0 + t\dot{v})^2 + \sin(\dot{u}_0 + t\dot{v}) + (u_0 + tv)^4$$

(qui $v \in C_c^\infty$ e $u \in H^1$)

Si può derivare sotto il segno di integrale e si arriva a

$$\int_a^b (2\dot{u}_0 + \cos(\dot{u}_0)) \dot{v} + 4u_0^3 v = 0$$

Questa si può riscrivere come

$$\int_a^b \underbrace{(2\dot{u}_0 + \cos(\dot{u}_0))}_{\neq 0} \underbrace{\dot{v}}_{\neq 0} dx = - \int_a^b \underbrace{4u_0^3}_{\neq 0} \underbrace{v}_{\neq 0}$$

da cui

derivata debole

$$(2u_0 + \cos(u_0))' = + 4u_0^3$$

↑ ↑
derivate deboli corretto dopo video

$$(L_p)' = L_s$$

$$\boxed{4.2} \quad u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow (2u_0 + \cos(u_0)) \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^1$$

↑ Hope

$$\psi(p) := 2p + \cos(p) \quad (= \psi'(p))$$

$$u_0 = \psi^{-1}(\text{RHS})$$

Cosa sappiamo di ψ^{-1} ? Per il teo. della funzione inversa sappiamo che è C^∞ .

Senza qui che

$$\psi'(p) \geq 1 \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

(Sempre la solita convessità di $\psi(p)$ 😊).

— o — o —