

ROAD MAP DEL METODO DIRETTO

Setting: S insieme, $F: S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Vogliamo mostrare che

$$\min \{ F(x) : x \in S \}$$

esiste.

1 **Formulazione debole** Cerco $\hat{S} \supseteq S$ e cerco $\hat{F}: \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\hat{F}(x) = F(x) \quad \forall x \in S$$

$\leq$ (basta questa)

2 **Compattezza** Sia $\{x_m\} \subseteq \hat{S}$ una successione per cui esiste $M \in \mathbb{R}$ (davvero reale) tale che

$$\hat{F}(x_m) \leq M \quad (x_m \text{ stanno in un sottolivello})$$

Spero di trovare una nozione di conv. in $\hat{S}$ t.c. $\{x_m\}$ ammette s. succ. conv. $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$

3 **Semicontinuità** Spero che, rispetto alla noz. di conv. di sopra, accada che

$$\hat{F} \text{ è Scl}$$

Se ①, ② e ③ riescono, allora di sicuro esiste

$$\min \{ \hat{F}(x) : x \in \hat{S} \}$$

④ Regolarità Dimostrare che esiste p.to di min. x_0 per $\hat{F}$ che sta in S (quello vero) e verifica $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$.

Se anche ④ riesce, allora x_0 è p.to di min. in S poiché

$$F(x_0) = \hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) \leq F(x) \quad \forall x \in S$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 ④ x_0 è p.to di min. ①
 — o — o —

Esempio

$$F(u) = \int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \sin(u^2) dx$$

Voglio dim. che ha minimo in

$$X := \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, u(2) = 7 \}$$

④ Formulazione debole. Entrano in gioco i Sobolev

$$\hat{X} := \left\{ u \in \begin{matrix} W^{1,2}((0,2)) \\ H^{1,2}((0,2)) \end{matrix} : \underbrace{u(0) = 3, u(2) = 7}_{\substack{\text{i valori puntuali, anche} \\ \text{al bordo, sono ben definiti}}} \right\}$$

Notazione: $H^1(\Omega)$ è sinonimo di $H^{1,2}(\Omega)$.

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \sin(u^2) \quad u \in H^1((0,2))$$

$\uparrow$ $\underbrace{\hspace{2cm}}$
 derivata funzione continua
 debole quindi ha senso integrarla

Cosa guardare:

- che le cond. al bordo che si impongono abbiano senso
- che gli integrali presenti nel funzionale abbiano senso
- precisare se $\hat{F}$ ha valori in $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

[2] Compattzza Nozione di convergenza in $\hat{X}$. In questo caso dico che $u_m \rightarrow u_\infty$ se

- $u_m \rightarrow u_\infty$ unif. in $[0,2]$
 - $u_m \rightarrow u_\infty$ debole L^2
- Se u_m soddisfa la DBC, allora anche u_∞ lo fa

In generale

- qualcosa di forte sulle funzioni
- qualcosa di debole sulle derivate

Vediamo che si ha compattzza dei sottolivelli. Sia $\{u_m\} \subseteq H^1$ tale che

$$\int_0^2 \frac{1}{2} u_m^2 + \sin(u_m^2) \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- Sistemiamo le derivate. Dalla stima sopra abbiamo

$$M \geq \hat{F}(u_m) \geq \int_0^2 \left(\frac{1}{2} u_m^2 - 1 \right) \geq \frac{1}{2} \int_0^2 u_m^2 - 2$$

$$\leadsto \underbrace{\int_0^2 u_m^2 dx}_{\|u_m\|_{L^2}^2} \leq 2M + 4$$

$\leadsto$ limitazione (equi) in L^2

Per compattzza debole delle palle esiste

$$u_{m_k} \rightarrow v_\infty \text{ debole in } L^2((0,2)).$$

- Si sistemano le funzioni. Queste sono equi- $\frac{1}{2}$ Hölder poiché

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \underbrace{\| \dot{u}_n \|_{L^2}}_{\leq \text{costante}} |y-x|^{\frac{1}{2}} \quad \forall (x,y) \in [0,2]^2$$

Inoltre le u_n sono equilimitate in quanto

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(0)|}_{\substack{\text{"3"} \\ \text{(DBC)}}} + \underbrace{|u_n(x) - u_n(0)|}_{\leq \| \dot{u}_n \|_{L^2} \underbrace{|x-0|}_{\leq 2}} \leq M'$$

Grazie a equilimitatezza + equicontinuità + op. di $[0,2]$ posso trovare una s.succ. di u_{n_k} (quella che andava bene per le derivate) tale che

$$u_{n_{k_i}} \longrightarrow u_\infty \text{ unif. in } [0,2].$$

Dal solito "doppio scambio" deduciamo che $v_\infty = \dot{u}_\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^2 u_{n_{k_i}}(x) \varphi'(x) dx &= - \int_0^2 \dot{u}_{n_{k_i}}(x) \varphi(x) dx \\ \downarrow & \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \int_0^2 u_\infty(x) \varphi'(x) dx &= - \int_0^2 v_\infty(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty. \end{aligned}$$

Osserviamo che $u_\infty \in \hat{X}$, cioè sta in H^1 e ha le DBC grazie alla conv. unif.

3 **SCI** Sia $u_n \rightarrow u_\infty$ risp. alla nozione di sopra

- Parte di funzione

$$\int_0^2 \sin(u_n^2) dx \longrightarrow \int_0^2 \sin(u_\infty^2) dx$$

↑
Analisi 2 grazie alla
conv. unif.

- Parte di derivata:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^2 u_n(x)^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_0^2 u_\infty(x)^2 dx$$

↑
sci debole della norma

Ora sappiamo che esiste un $\{\hat{F}(u) : u \in H^1 + \text{DBC}\}$

- [4] **Regolarità** Sia u_0 un p.to di min di $\hat{F}$ in $\mathbb{X}$.
Voglio dim. che $u \in C^1([0, 2])$, e pure C^∞ .
Questo si fa in 3 fasi

[4.1] ELE debole

[4.2] Guadagno C^1

[4.3] BOOTSTRAP fino a C^∞

[4.1] Data $v \in C_c^\infty((0, 2))$ pongo

$$\varphi(t) := \int_0^2 \left[\frac{1}{2} (u_0 + t v)^2 + \sin(u_0 + t v)^2 \right] dx = \hat{F}(u_0 + t v)$$

e calcolo $\varphi'(0)$. Se tutto va bene (ma va verificato) viene

$$\varphi'(0) = \int_0^2 [u_0(x) v(x) + 2 u_0(x) v(x) \cos(u_0(x)^2)] dx$$

Se u_0 è p.to di min, questo deve fare 0, cioè

$$\int_0^2 \underbrace{u_0(x)}_f \underbrace{\dot{v}(x)}_{\dot{\varphi}} dx = - \int_0^2 \underbrace{2 u_0(x) \cos(u_0(x)^2)}_g \underbrace{v(x)}_{\varphi} dx$$

Questo dice che g è la deriv. debole di f , cioè

$$\underbrace{(\dot{u}_0)}_{\text{Derivata debole della derivata debole}} = 2 u_0 \cos(u_0^2) \quad (\text{ELE di una volta})$$

Derivata debole
della derivata debole

$$\boxed{4.2} \quad u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

Per compatibilità classica usu banale segue che

$$\dot{u}_0 \in C^1 \quad \text{e quindi} \quad u_0 \in C^2$$

e quindi u_0 è solus. classica di ELE, cioè

$$\ddot{u}_0 = 2 u_0 \cos(u_0^2)$$

$$\boxed{4.3} \quad u_0 \in C^2 \Rightarrow \text{RHS} \in C^2 \Rightarrow \ddot{u}_0 \in C^2 \Rightarrow u_0 \in C^4$$

... e così via fino a C^∞ .

L'unica cosa da sistemare è la possibilità di derivare sotto il segno di integrale, il che si traduce nel trovare una giustificazione per la "presunta derivata":

$$\varphi'(t) = \int_0^2 \underbrace{(\ddot{u}_0 + t \ddot{v}) \dot{v} + 2(u_0 + tv) \cos((u_0 + tv)^2) v}_{\leq g(x) \text{ integrabile}}$$

In questo caso è praticamente gratis ($v \in C_c^\infty$, $\dot{u}_0 \in L^2$
— o — o — $\dot{u}_0 \in L^1 \dots$)