

Oss. Se $v \in L^1_{loc}((a,b))$ e $x_0 \in (a,b)$, allora

$$V(x) := \int_{x_0}^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

è CONTINUA.

Dim. Dato $y_0 \in (a,b)$

$$V(y_0+r) - V(y_0) = \int_{y_0}^{y_0+r} v(t) dt = \int_a^b v(t) \underbrace{\mathbb{1}_{[y_0, y_0+r]}(t)}_{\substack{\text{funzione} \\ \text{caratteristica}}} dt$$

↓
q.o. dominatamente

Corollario Se u ammette derivata W -debole in (a,b) , allora u coincide q.o. con una funzione continua.

Notazione Nel seguito

- ① diremo che u è una funzione continua
- ② parleremo di valori PUNTUALI di $u(x)$, intendoli come i valori assunti dall'unico rappresentante continuo.

Def. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente
Si indica con

$$W^{1,p}((a,b))$$

l'insieme delle $u \in L^p((a,b))$ che ammettono derivata W -debole $v \in L^p((a,b))$ (senza i loc.)

Oss. Non essendoci i loc, da $\forall x$ risulta definita per ogni $x \in [a, b]$, estremi compresi, e di conseguenza posso pensare u definita e continua su $[a, b]$ chiuso. Questo autorizza a parlare di $u(a)$ e $u(b)$.

Teorema (Hölderianità delle funzioni di Sobolev)

Sia $p \in (1, +\infty]$ (N.B.: ho escluso $p=1$)

e sia $u \in W^{1,p}((a, b))$.

Sia q tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q=1$ se $p=+\infty$)

Allora u è $\frac{1}{q}$ -Hölder in (a, b) e vale la stima

$$|u(y) - u(x)| \leq \|u'\|_{L^p((a, b))} |y - x|^{1/q} \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2$$

$\uparrow$
derivata W debole

Dim Sappiamo che u è la prim. della deriv. W-deb. u' .
Supponiamo wlog $y > x$. Allora

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= \int_x^y u'(t) dt = \int_a^b u'(t) \underbrace{\mathbb{1}_{[x, y]}(t)}_{\frac{1}{q}} dt \\ &\stackrel{\text{(Hölder)}}{\leq} \left\{ \int_a^b |u'(t)|^p dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b \mathbb{1}_{[x, y]}(t)^q dt \right\}^{1/q} \\ &= \|u'\|_{L^p((a, b))} \cdot |y - x|^{1/q} \end{aligned}$$

Questo vale se $p \in (1, +\infty)$. Il caso $p = +\infty$ è ancora più semplice (non serve nemmeno Hölder) e da u risulta Lipschitziana.

— o — o —

Oss. Limitandosi anche solo agli $x \in (a, b)$, avremmo ottenuto che u è unif. cont. in (a, b) , dunque estendibile con continuità su tutto $[a, b]$ (vedi Analisi 1).

Def. (Derivata H-debole) Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e siano u e v in $L^1_{loc}((a,b))$.

Si dice che v è la deriv. H-debole di u se esiste

$$\{u_m\} \subseteq C^\infty((a,b)) \quad (\text{oppure } \{u_m\} \subseteq C^1((a,b)))$$

↑ non sto mettendo c

tale che

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u & \text{in } L^1_{loc}((a,b)) \\ \dot{u}_m &\rightarrow v & \text{in } L^1_{loc}((a,b)) \end{aligned}$$

↑ derivate vere

Oss. Usare succ. in C^∞ o in C^1 è la stessa cosa (esercizio)

Oss. Anche le proprietà più semplici, tipo l'unicità, sono difficili da ottenere dalla def. H.

Esempio $u(x) = |x|$ ammette derivata H-debole in $(-1,1)$

Devo trovare approx. C^∞ : $u_m(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{m}}$

Devo verificare 2 cose

• $u_m(x) \rightarrow |x|$ in $L^1((-1,1))$
(lo fa pure uniformemente)

• $\dot{u}_m(x) \rightarrow \pm 1$ in $L^1((-1,1))$ (qui non può essere unif.)



$$\dot{u}_m(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{m}}} \rightarrow \frac{x}{|x|}$$

puntualmente per
 $x \neq 0$

e vale la dominazione
 $|\dot{u}_m(x)| \leq 1$ sempre

— o — o —

Teorema ($H \Rightarrow W$) La derivata H -debole è anche derivata W -debole.

Dim. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ vale

$$\int_a^b u_m(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b u_m(x) \varphi(x) dx$$

$\uparrow$
Analisi 1

Ora passo al limite RHS e LHS.

Corollario Unicità + tutte le propr. della lex. prec.

Teorema ($W \Rightarrow H$, e quindi $H=W$).
Le derivate W deboli sono H -deboli

Dim. Siano u e v in $L^1_{loc}(a,b)$ con v deriv. W -debole di u .

Devo trovare $\{u_m\} \subseteq C^\infty(a,b)$ t.c.

$$\begin{cases} u_m \rightarrow u \\ v_m \rightarrow v \end{cases} \text{ in } L^1_{loc}$$

In uno dei tanti modi possibili approssimo v con funzioni $v_m \in C^\infty(a,b)$. (si può fare in modo elementare anche senza convoluzione via step functions)

Considero le funzioni integrali

$$V_m(x) := \int_{x_0}^x v_m(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

e dico che a meno di costanti sono le u_m che cerco
(a posteriori mi conviene usare $u(x_0)$ come costante)
Dico che

$$V_m(x) \rightarrow V_\infty(x) = \int_{x_0}^x v(t) dt = u(x) - u(x_0)$$

La convergenza è puntuale e dominata sui sottointervalli $(a', b') \subset (a, b)$, quindi pure $L^1((a', b'))$.

Questo completa la dimostrazione

— o — o —

Def. (Spazi di Sobolev H , prima versione)

Si indica con $H^{1,p}((a,b))$ l'insieme delle funzioni $u \in L^p((a,b))$ che ammettono derivata H -debole $u' \in L^p((a,b))$.
Detto in altro modo, diciamo che

$$u \in H^{1,p}((a,b))$$

se esiste $\{u_n\} \subseteq C^{\infty,p}((a,b)) = C^{\infty}((a,b)) \cap \underbrace{L^p((a,b))}_{\substack{u_n \in L^p \\ u'_n \in L^p}}$
tale che

• $u_n \rightarrow u$ in L^p

• $u'_n \rightarrow u'$ in L^p

↑ derivata debole

Oss. Nel teorema precedente, se u e u' stanno in L^p con $p < +\infty$, allora le approssimanti che abbiamo costruito convergono pure in $L^p((a,b))$.

Def. (Spazi di Sobolev, def. H astratta)

Poniamo

$$C^{\infty,p}((a,b)) = \{u \in C^{\infty}((a,b)) : u \text{ e } u' \in L^p((a,b))\}$$

Osservo che $C^{\infty,p}((a,b))$ è uno sp. metrico rispetto alla distanza

$$\text{dist}(f, g) := \|f - g\|_{L^p} + \|f' - g'\|_{L^p}$$

Allora $H^{1,p}((a,b))$ è il completamento di $C^{\infty,p}$ risp. a dist .

Oss. Il teorema di approx. detto sopra dice che le 2 definizioni H sono equivalenti e sono equivalenti alla defin. W , quindi

$$W^{1,p}((a,b)) = H^{1,p}((a,b)) \quad \text{se } p < +\infty$$

Oss. La def. H è comoda "per fare i conti".
— o — o —