

SPAZI DI SOBOLEV (Versione baby 😊)

Baby
 Dimensione 1
 Ordine 1 (derivate prime)
 (a,b) intervallo

Generale (lezioni ≥ 25)
 Dimensione d qualunque
 Ordine m qualunque
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque

Due approcci / definizioni

- approccio W (perfetto per passare al limite)
- approccio H (perfetto per tes. algebrici e formule)

Derivata debole, definizione W "W = weak"

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e siano u e v in $L^1_{loc}((a,b))$
 Si dice v è la derivata W-debole di u se

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

Brutalmente: v gioca il ruolo di u' nella integr. per parti contro C_c^∞

Proprietà quasi banali

① La der. W-debole, se esiste, è unica.

Siano v_1 e v_2 due derivate deboli di u . Allora

$$\int_a^b v_1 \varphi dx = - \int_a^b u \varphi' dx = \int_a^b v_2 \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$\uparrow$ v_1 è der. deb.
 $\uparrow$ v_2 è deriv. debole

cioè $\int_a^b (v_1 - v_2) \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

FLCV $\Rightarrow v_1(x) = v_2(x)$ per q.o. $x \in (a, b)$.
 $\uparrow$ sense davvero in versione L^1_{loc} .

② Linearità Se v_1 è der. W-deb. di u_1
 v_2 " " " u_2

allora $av_1 + bv_2$ è der. W-debole di $au_1 + bu_2$
 per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

Dim.: Linearità integrale

③ Compatibilità classica basic: se $u \in C^1((a, b))$, allora la
 deriv. W-deb. coincide con quella classica.

Dim.: int. per parti di Analisi

Prop. (Compatibilità classica meno ovvia)

Supponiamo che v sia deriv. W-deb. di u e che $v \in C^0((a, b))$

Allora $u \in C^1((a, b))$ e $v = u'$.

u coincide q.o. con una funzione C^1

Dim. Considero una qualunque primitiva V di v . Allora

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) \, dx = \int_a^b V(x) \varphi'(x) \, dx$$

$\uparrow$ v è deriv. debole $\uparrow$ int. per parti analisi 1

per ogni $\varphi \in C_c^\infty$. Ma allora

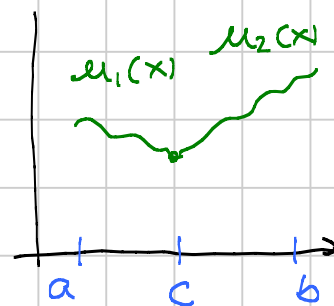
$$\int_a^b (u(x) - V(x)) \varphi'(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

DBR in versione $L^1_{loc} \Rightarrow u(x) = V(x) + c$ per q.o. $x \in (a, b)$

Esempio 1 Sia u una funzione continua e C^1 a tratti

$$u_1 \in C^1([a, c])$$

$$u_2 \in C^1([c, b])$$



Dico che u è deriv. debolmente e la sua derivata debole è l'"unione" di u_1' e u_2' .

(Il valore in c è irrilevante)

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = \int_a^c u_1(x) \varphi'(x) dx + \int_c^b u_2(x) \varphi'(x) dx$$

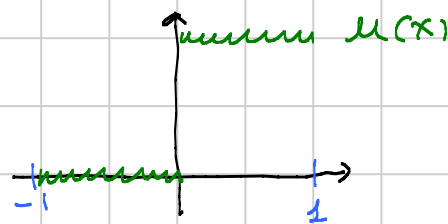
$$= - \int_a^c u_1'(x) \varphi(x) dx + [u_1(x) \varphi(x)]_a^c - \int_c^b u_2'(x) \varphi(x) dx + [u_2(x) \varphi(x)]_c^b$$

$$= - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx + \underbrace{u_1(c) \varphi(c)}_{\text{si annullano per la cont. di } u} - \underbrace{u_1(a) \varphi(a)}_{\text{si annullano per la cont. di } u} + \underbrace{u_2(b) \varphi(b)}_{\text{si annullano per la cont. di } u} - \underbrace{u_2(c) \varphi(c)}_{\text{si annullano per la cont. di } u}$$

si annullano per la cont. di u

Esempio 2 Sia $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la HEAVISIDE (fizzio)

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$



Questa non ha derivata debole.

Supponiamo che $v \in L^1_{loc}((-1, 1))$ sia la derivata w-debole.

$$\int_a^b v(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty$.

Considero una successione φ_n di funzioni come in figura

(Basta prendere $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$ a campana e poi porre $\varphi_n(x) := \varphi(nx)$)



$$\int_a^b \underbrace{v(x) \varphi_n(x)}_{\downarrow} dx = \varphi_n(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o puntualm. q.o. dominata da $|v(x)|$
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Oss. Un giorno diventerà derivabile, e la sua derivata sarà una misura (la δ di Dirac).
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Teorema (Stabilità per passaggio al Limite)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e siano $\{\mu_n\} \subseteq L^1_{loc}((a,b))$ e $\{v_n\} \subseteq L^1_{loc}((a,b))$

Supponiamo che

(i) v_n è der. W-debole di μ_n per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\mu_n \rightarrow \mu_\infty$ in $L^1_{loc}((a,b))$ } cioè $\mu_n \rightarrow \mu_\infty$ in
 (iii) $v_n \rightarrow v_\infty$ " " } $L^1(\Omega)$ per ogni
 $\Omega \subset\subset (a,b)$

(basta $\Omega = (a', b')$ con $a < a' < b' < b$)

Allora v_∞ è la deriv. W-debole di μ_∞ .

Dim. Per ogni $\varphi \in C_c^\infty$ vale

$$\int_a^b \mu_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v_n(x) \varphi(x) dx$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int_a^b \mu_\infty(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \varphi(x) dx \quad \text{☺}$$

Serve che $\mu_n \rightarrow \mu_\infty$ in $L^1((a', b'))$ con $\text{supp di } \varphi \subseteq (a', b')$.

Oss. MOLTO importante Bastano convergenze molto + deboli

- $u_n \xrightarrow{\text{debole}} u_\infty$ e $v_n \xrightarrow{\text{debole}} v_\infty$ in $L^2(\Omega)$ per ogni $\Omega \subset (a,b)$
- " " " $L^1(\Omega)$ (un giorno)
- ancora meno (non in questo corso).

Prop (Le funzioni derivabili debolmente sono le primitive delle loro derivate deboli).

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ che ammette derivata debole $v \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$.

Scelto a caso $x_0 \in (a,b)$, poniamo

$$V(x) := \int_{x_0}^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

ha senso perché $v \in L^1_{\text{loc}}$

Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) = V(x) + c$ per q.o. $x \in (a,b)$.

Dim. Supponiamo per semplicità $v \in L^1((a,b))$ senza loc., in modo da porre

$$V(x) := \int_a^x v(t) dt \quad \forall x \in [a,b]$$

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ vale

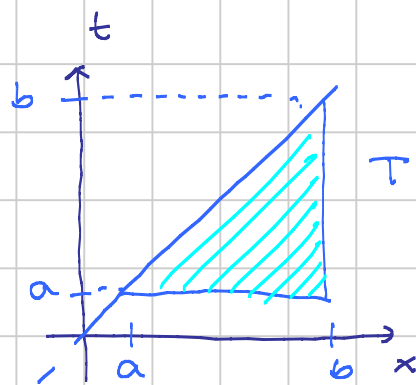
$$\int_a^b V(x) \varphi'(x) dx = \int_a^b dx \varphi'(x) \int_a^x v(t) dt$$

$$(\text{asse } x) = \iint_T \varphi'(x) v(t) dt dx$$

$$(\text{asse } t) = \int_a^b dt \int_t^b dx \varphi'(x) v(t)$$

$$= \int_a^b dt v(t) \underbrace{\int_t^b \varphi'(x) dx}_{\varphi(b) - \varphi(t)} = - \int_a^b v(t) \varphi(t) dt = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

(der. deb.) = $\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx$



Ma allora

$$\int_a^b (v(x) - u(x)) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

DBR $\Rightarrow$ tesi

Se v è solo L^1_{loc} , allora la primitiva va definita a partire da $x_0 \in (a, b)$ e si complica un po' con l'integrale sul triangolo (mettere a posto per esercizio).

— 0 — 0 —