

Esempi classici di spazi di Hilbert: spazi L^2

Setting classico: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto

$$L^2(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} f(x)^2 dx < +\infty \right\}$$

(quozientato modulo le funzioni che sono 0 quasi ovunque)

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

$$\|f\| = \left\{ \int_{\Omega} f(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

σ -algebra

Setting + generale: $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$

$\uparrow$
insieme

$\uparrow$
misura

$\uparrow$ $+\infty$ concesso
 $\uparrow$ num. additiva
sui disgiunti)

Teorema

$L^2(\Omega)$ è uno sp. di Hilbert

Idee della dim.

- È uno sp. vettoriale (facile verifica: $|f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$)
- Il prod. scalare è ben definito ($|fg| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2$)
Il fatto che $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ segue dall'aver quozientato.
- La completezza non è per nulla ovvia e segue da una serie di risultati preliminari.
Sia $\{f_n\} \subseteq L^2$ succ. di Cauchy

→ basta dim. che esiste una s.succ. conv.

→ con il lemma di accelerazione posso assumere, a meno di s.succ., che

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2^n} \quad (\text{basta che la serie converga})$$

Basta quindi dim. che una succ. accel. ammette limite

→ Osservo che

$$f_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \dots + (f_n - f_{n-1})$$

quindi basta dim. che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \quad \text{converge}$$

(Guai ad usare che la serie delle norme converge)

→ Considero $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$

e osservo che le somme parziali sono equilm. in $L^2(\Omega)$ e crescenti risp. ad n

→ Applico teo. conv. monotona (Beppo - Levi) e deduco che la serie di sopra converge ad una funzione $L^2(\Omega)$ crescendo, quindi converge puntualmente q.o.

→ Se conv. con i val. assol., converge senza, e lo fa in maniera dominata, quindi pure in $L^2(\Omega)$.

Nel caso di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ si ha che $L^2(\Omega)$ è separabile

Dim. Devo esibire un denso numerabile.

Basta prendere le comb. lineari finite a coeff. in $\mathbb{Q}$ di funzioni caratteristiche di prodotti di intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$.

"Altro" esempio:

$$\ell^2 = \{ \text{succ. } \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \}$$

In realtà si tratta di $L^2(\mathbb{N})$ rispetto alla misura che conta i p.ti.

In realtà abbiamo dimostr. che tutti gli Hilbert separabili sono (isomorfi a) ℓ^2 .

Esercizio ℓ^2 è completo (dim. elementare)

Dim. Pensiamo

$$\ell^2 = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{k=1}^{\infty} f(k)^2 < +\infty \}$$

Sia $\{f_n\} \subseteq \ell^2$ una succ. di Cauchy.

Step 1 Dimostro che esiste $f_{\infty}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_n(k) \rightarrow f_{\infty}(k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{conv. puntuale})$$

Basta osservare che

$$|f_n(k) - f_m(k)|^2 \leq \|f_n - f_m\|_{\ell^2}^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi $\{f_n(k)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Step 2 Dimostro che $f_{\infty} \in \ell^2$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=1}^m f_{\infty}(k)^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m f_n(k)^2 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\ell^2}^2$$

limitate perché $\{f_n\}$ è di Cauchy

Step 3 Le code sono UNIFORMEMENTE piccole

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \varepsilon$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\|f_m - f_{m_0}\|_{\ell^2} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0$$

Prendo $M \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m \leq m_0 \quad (\text{posso perché sono un numero finito})$$

- Dico che lo stesso M va bene anche per $n \geq m_0$.
Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 &= \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k) + f_{m_0}(k)|^2 \\ &\leq \underbrace{2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k)|^2} + \underbrace{2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_{m_0}(k)|^2} \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 2 \|f_m - f_{m_0}\|_{\ell^2}^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } m \geq m_0 \end{aligned}$$

Step 4 Dimostro che

$$\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \varepsilon$$

Remark dello step 2 (considero $\sum_{k=M}^{M_1} \dots$ e poi $M_1 \rightarrow \infty$)

Step 5 Dimostro che $f_n \rightarrow f_\infty$ in l^2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(k) - f_\infty(k)|^2 = \sum_{k=1}^{M-1} |f_n(k) - f_\infty(k)|^2 \quad (1)$$

$$+ \sum_{k=M}^{\infty} |f_n(k) - f_\infty(k)|^2 \quad (2)$$

$$(2) \leq 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_n(k)|^2 + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_\infty(k)|^2 \leq 4\varepsilon$$

se scelgo M grande

Fissato M , (1) diventa piccolo per n grande.

Consideriamo $L^2((a,b))$ o più semplicemente $L^2((0,\pi))$

Un sottoinsieme ortogonale è $\{\sin(nx)\}$. Infatti

$$\int_0^\pi \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

(Analisi 1)

Moltiplicando per costante opportuna diventa ortonormale

$$\int_0^\pi \sin^2(mx) dx = \frac{\pi}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

In realtà ha pure lo span denso, quindi è una base ortonormale 😊.

Ci sono 3 possibili dimostrazioni

① Stone - Weierstrass

② Conv. unif. delle serie di Fourier per funzioni C^1

③ Sono gli autovettori di un operatore COMPATTO
(vedi corso + avanti)

Essendo una base, ora sappiamo che

$$\sin(mx) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2((0, \pi))$$

Dim. elementare Intanto è una succ. limitata in L^2
Devo dim. che

$$\int_0^\pi \sin(mx) f(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^2$$

Essendo limitata, basta dim. per $f \in \text{q.r.}$ che spazza un denso.

Uso le caratteristiche dei sottointervalli

$$\int_a^b \sin(mx) dx \rightarrow 0$$

$$\text{"} \left[\frac{1}{m} \cdot (-\cos(mx)) \right]_a^b$$

↑ ☺

— 0 — 0 —

Esercizio Pensare a $\sqrt{m} \sin(mx)$