

Prop. (Continuità forte + debole del prod. scalare)

Sia H sp. di Hilbert. Siano $\{u_m\}$ e $\{w_m\}$ due succ. tali che

(i) $u_m \rightarrow u_\infty$ (forte)

(ii) $w_m \rightarrow w_\infty$ (debole)

(iii) w_m sia limitata (un giorno sarà conseguenza della (ii))

Allora

$$\langle u_m, w_m \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$$

Dim. $\langle u_m, w_m \rangle = \underbrace{\langle u_m, w_m \rangle - \langle u_\infty, w_m \rangle}_{\downarrow 0} + \underbrace{\langle u_\infty, w_m \rangle}_{\downarrow (ii) \langle u_\infty, w_\infty \rangle}$

$$|\langle u_m, w_m \rangle - \langle u_\infty, w_m \rangle| \leq \underbrace{\|u_m - u_\infty\|}_{\downarrow (i) 0} \cdot \underbrace{\|w_m\|}_{\leq M (iii)}$$

Oss. Vedere che succede se uso l'altro termine misto.

Cose che NON funzionano negli Hilbert di dimensione infinita

① Due conv. deboli non bastano per passare al limite i prod. scal.

$$e_m \rightarrow 0, \text{ ma } \langle e_m, e_m \rangle \equiv 1 \text{ e non tende a } \langle 0, 0 \rangle$$

② La norma non è continua risp. alla conv. debole.

③ Le palle chiuse non sono fortemente compatte

④ Le sfere $\{u \in H : \|u - u_0\| = R\}$ non sono deb. chiuse e non sono compatte né forte, né debole

Teorema 1 Sia H uno sp. di Hilbert.

Allora la norma è SCI, cioè

$$v_m \rightarrow v_\infty \quad \Rightarrow \quad \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|v_m\| \geq \|v_\infty\|$$

Dim. Osservo che basta dim. che

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|v_m\|^2 \geq \|v_\infty\|^2$$

$$\|v_m\|^2 = \|v_m - v_\infty + v_\infty\|^2$$

$$= \underbrace{\|v_m - v_\infty\|^2}_{\geq 0} + \|v_\infty\|^2 + 2 \langle v_m - v_\infty, v_\infty \rangle$$

$$\geq \|v_\infty\|^2 + 2 \underbrace{\langle v_m - v_\infty, v_\infty \rangle}_{\downarrow 0}$$

Teorema 2 Sia H uno sp. di Hilbert **SEPARABILE**

Allora le palle chiuse sono debolmente compatte.

Detto meglio: se $\{v_m\}$ è una succ. limitata, allora esiste $\{n_k\}$ succ. crescente di interi positivi ed esiste $v_\infty \in H$ t.c.

$$v_{n_k} \rightarrow v_\infty$$

(ogni succ. limitata ammette s.succ. debolm. conv.)

Dim. Sia $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|v_m\| \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale (qui ho usato la separabilità)

Step 1 Dico che esiste $n_k \rightarrow +\infty$ tale

$$\langle v_{n_k}, e_i \rangle \rightarrow d_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{limite delle} \\ \text{componenti} \end{array}$$

Si dimostra con il solito procedimento diagonale.

- Prendo $i=1$, e osservo che $|\langle v_m, e_1 \rangle| \leq \|v_m\| \leq M$
 Per Analisi 1 a meno di s.succ. ↑ c.s.

$$\langle v_m, e_1 \rangle \rightarrow \alpha_1$$

Chiamo N_1 gli indici della s.succ.

- Prendo $i=2$, e osservo che $|\langle v_m, e_2 \rangle| \leq M$
 Per Analisi 1 esiste una s.succ. DELLA PRECEDENTE t.c.

$$\langle v_m, e_2 \rangle \rightarrow \alpha_2$$

Chiamo $N_2 \subseteq N_1$ i suoi indici

- Proseguendo analog. trovo sottoinsiemi

$$N \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

- Considero m_k tale che $\{m_k\}$ crescente e $m_k \in N_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e questa è quella che va bene.

Step 2 Noni tanto pone

$$v_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

Serve la conv. della serie, che è equiv. a $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < +\infty$, che a sua volta è equiv. ad un equi-bound sulle somme parziali. Prendiamo $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2 && \text{(uso somma finita)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2}_{= \|v_{m_k}\|^2} \leq M \end{aligned}$$

Step 3 Abbiamo costruito $u_\infty \in H$ tale che

$$\langle u_{n_k}, e_i \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Sulle succ. limitate sappiamo che la conv. delle componenti è equiv. alla conv. debole

— 0 — 0 —

Esercizio Supponiamo che

(i) $u_n \rightarrow u_\infty$

(ii) $\|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$

Allora $u_n \rightarrow u_\infty$. [Nei Banach sarà falso]

Dim. $\|u_n - u_\infty\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2\langle u_n, u_\infty \rangle \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \|u_\infty\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2\|u_\infty\|^2 \\ \text{— 0 — 0 —} \end{array}$$

Occhio alle grandi tentazioni !!!

Supponiamo $u_n \rightarrow u_\infty$. Allora

$$\|u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle^2$$

↓ per conv. debole

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle^2 = \|u_\infty\|^2$$

NON SI SCAMBIANO LE SERIE CON I LIMITI

Def. (Sp. di Banach) È uno spazio vettoriale V dove è definita una norma, che induce una distanza che lo rende un metrico completo.

Teorema Sia V uno sp. di Banach e sia $\{v_n\} \subseteq V$ una successione.

Allora vale l'implicazione

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < +\infty}_{\text{serie delle norme}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$$

Dim. Considero le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=1}^n \|v_k\| \qquad \hat{S}_n := \sum_{k=1}^n v_k$$

Per ogni $m \geq n$ vale

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_m - \hat{S}_n\| &= \|v_m + v_{m-1} + \dots + v_{n+1}\| \\ &\leq \|v_m\| + \|v_{m-1}\| + \dots + \|v_{n+1}\| \\ &= S_m - S_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conclusione: } \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < +\infty &\Rightarrow \{S_n\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \{\hat{S}_n\} \text{ è di Cauchy in } V \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ converge.} \end{aligned}$$

Cosa succede se lo spazio NON è separabile.

Def (Base Hilbertiana in generale) È un sottoinsieme $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ tale che

(i) $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ se $i = j$ e 0 altrimenti $(i, j) \in I^2$

(ii) $\text{Span}(\{e_i\}_{i \in I})$ è denso in H .

Teorema 1 La base Hilbertiana esiste sempre

Dim.

- Considero tutti i sottoinsiemi che verificano (i)
- Osservo che sono ordinati part. per inclusione
- Osservo che i sott. tot. ordinati hanno un maggiorante (cioè l'unione)
- Per Zorn ne esiste uno massimale
- Se non valesse (ii), potrei aggiungere un elemento.

Teorema 2 Data una base $\{e_i\}_{i \in I}$ come sopra, e dato $v \in H$, pongo

$$v_i := \langle v, e_i \rangle \quad \forall i \in I$$

Allora $v_i = 0$ tranne al più una quantità numerabile di indici, e valgono le rappresentazioni di v , $\|v\|$ e $\langle v, w \rangle$ come nel caso numerabile.

— 0 — 0 —