

Dim. teo. 2Sia dato $v \in H$. Voglio dim. che

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k$$

Il resto, cioè formule per norma e prod. scalare sono corollari.

Chiamo $\hat{v}$ il RHS della formula di sopra. Devo dimostrare

• che la serie conv.

• che $\hat{v} = v$.

[Aggiunto dopo video]

La conv. della serie è equiv. a $\sum_{k=0}^{\infty} \langle v, e_k \rangle^2 < +\infty$, la quale a sua volta è equiv. a una equi-limitazione delle somme parziali. Fissato n , scrivo

$$v = \underbrace{\langle v, e_0 \rangle e_0 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n}_{S_n} + r_n \quad \uparrow \text{resto}$$

Da questa segue che

$$\|v\|^2 = \|S_n\|^2 + \|r_n\|^2 + 2 \underbrace{\langle S_n, r_n \rangle}_0 \geq \|S_n\|^2$$

$$(\text{geom. 1}) \nearrow = \sum_{k=0}^n \langle v, e_k \rangle^2$$

Per dimostrare che $\langle S_n, r_n \rangle = 0$ osservo che $\langle r_n, e_k \rangle = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ in quanto basta moltip. scalarmente per e_k a dx e sx:

$$\langle v, e_k \rangle = \langle S_n, e_k \rangle + \langle r_n, e_k \rangle$$

" $\langle v, e_k \rangle$

Una volta che $\hat{v}$ è ben definito sappiamo dal Lemma 2 che

$$\langle \hat{v}, e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè

$$\langle \hat{v} - v, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ma allora dal Lemma 3 concludiamo che $v = \hat{v}$.

Dim. Teo 1 Sia $D \subseteq H$ denso e numerabile

Step 1 Esiste un sottoinsieme $D' \subseteq D$ linearmente indipendente e con lo stesso Span: $\text{Span}(D') = \text{Span}(D)$

Algoritmo: $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$

Costruisco D' così: d_1 lo piglio se $\neq 0$

d_2 lo piglio se $\notin \text{Span}\{d_1\}$

d_3 lo piglio se $\notin \text{Span}\{d_1, d_2\}$

Step 2 Applico Gram-Schmidt a D' in modo da ottenere un sistema ortonormale.

Def. (Convergenza debole) Sia H uno sp. di Hilbert.

Dico che v_n converge debolmente a v_∞ e scrivo

$$v_n \rightarrow v_\infty$$

se

$$\langle v_n, v \rangle \rightarrow \langle v_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Fatti semplici

① Il limite debole, se esiste, è unico

Dim Supp. $u_m \rightarrow u_\infty$ e $u_m \rightarrow \hat{u}_\infty$. Allora

$$\langle u_\infty - \hat{u}_\infty, v \rangle = \underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle u_m, v \rangle}_{\langle u_\infty, v \rangle} - \underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle u_m, v \rangle}_{\langle \hat{u}_\infty, v \rangle} = 0$$

Concluso per caratt. vettore nullo poiché v è arbitrario.

② Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$

Dim $\langle u_{m_k}, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle \quad \forall v \in V$

③ Se $u_m \rightarrow u_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$, allora

$$a u_m + b w_m \rightarrow a u_\infty + b w_\infty$$

Dim. Linearità del prod. scalare

④ Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $u_m \rightarrow u_\infty$.

Dim Continuità del prod. scalare

⑤ Se $\dim H < +\infty$, allora

$$u_m \rightarrow u_\infty \iff u_m \rightarrow u_\infty$$

Dim. In dim. finita la conv. di vettori è equivalente alla conv. delle componenti, la quale è implicata dalla conv. dei prod. scalari.

⑥ Se $\dim H = +\infty$, allora esistono succ. che convergono debolmente, ma non fortemente.

Dim. Prendo un qualunque sistema ortonormale $\{e_n\}$ (non serve lo span denso, e quindi esiste facilmente sempre). Dico che

$$e_n \rightarrow 0 \quad \text{ma} \quad e_n \not\rightarrow 0$$

• $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ se $n \neq m$, quindi $\{e_n\}$ non ha nemmeno s.succ. di Cauchy, quindi di sicuro non converge forte.

• Dimostro $e_n \rightarrow 0$ nel caso in cui è base ortonorm. Fissato $v \in H$, devo dim. che $\langle v, e_n \rangle \rightarrow 0$, ma so che

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle^2$$

e il termine generale di una serie convergente $\rightarrow 0$.
(se $\text{Span}(e_n)$ non è denso in H , vale comunque il $\geq \dots$)
— 0 — 0 —

Domanda: quanto posso riuolebolire la richiesta nella def.?

$$\langle v_m, v \rangle \rightarrow \langle v_\infty, v \rangle \quad \forall v \in W \subseteq H$$

Quanto può essere piccolo W ?

Prop. Sia H uno sp. di Hilbert, sia $\{v_m\}$ una succ. e sia $v_\infty \in H$, e sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme

Supponiamo che

(i) $\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W$

(ii) $\text{Span}(W)$ è denso in H

(iii) $\{v_m\}$ è limitata. ← SERVE !!!

Allora $v_m \rightarrow v_\infty$.

Dim. Sia $M \in \mathbb{R}$ tale che $\|u_m\| \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Brutal mode

$$|\langle u_m, u \rangle - \langle u_\infty, u \rangle| \leq |\langle u_m, u \rangle - \langle u_m, u_\varepsilon \rangle| \quad (1)$$

$$+ |\langle u_m, u_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, u \rangle| \quad (3)$$

Dato $u \in H$, scelgo $u_\varepsilon \in \text{Span } W$ abbastanza vicino.

A quel pto (1) e (3) sono piccoli per vicinanza, mentre (2) è piccolo per ipotesi.

Rigoroso:

→ mi vengono dati $u \in H$ ed $\varepsilon > 0$

→ scelgo u_ε tale che

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{4M+1}$$

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{4\|u_\infty\|+1}$$

→ visto u_ε , scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\langle u_m, u_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

Ora per $m \geq m_0$ avremo che

$$(1) = |\langle u_m, u \rangle - \langle u_m, u_\varepsilon \rangle| \leq \underbrace{\|u_m\|}_{\leq M} \cdot \|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$(3) = | \dots | \leq \|u_\infty\| \cdot \|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$(2) \leq \frac{1}{4} \varepsilon \text{ per definizione.}$$

Ho usato in (2) che se $\langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in W$, allora lo fa anche per ogni $w \in \text{Span}(W)$
comb. lin. $\uparrow$ FINITE

— o — o —

Teorema Sia H sp. di Hilbert separabile, e sia $\{e_n\}$ base ortonormale.

Allora la convergenza debole è equivalente alla conv. delle componenti per la succ. u_n limitata

$$u_n \rightarrow u_\infty \iff \langle u_n, e_k \rangle \rightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dim. $\Rightarrow$ definizione con $v = e_k$

$\Leftarrow$ Prop. + Span denso.

Morale

- in dim. finita conv. vettori e conv. comp. sono equiv.
- in dim. infinita No (una è la forte, l'altra è la debole sulle succ. limitate)

Esempio La limitatezza serve. Basta osservare che

$$\langle m e_n, e_k \rangle \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ma $m e_n \not\rightarrow 0$ perché ponendo

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \quad (\text{ben definito per solito motivo})$$

si ha che $\langle m e_n, v \rangle = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi non tende a 0.

— 0 — 0 —

Aggiunto dopo video: enunciato dell'ultimo teorema con tutti i dettagli.

Teorema Sia H uno sp. di Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$, sia $\{u_n\} \subseteq H$ una successione limitata, e sia $u_\infty \in H$.

Allora i seguenti due fatti sono equivalenti:

(i) $u_n \rightarrow u_\infty$ (cioè $\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle$ per ogni $v \in H$)

(ii) le componenti di u_n tendono alle componenti di u_∞ (cioè $\langle u_n, e_k \rangle \rightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).