

Variatione interna (variazione orizzontale)

Variatione esterna o verticale

$$u(x) + t v(x)$$

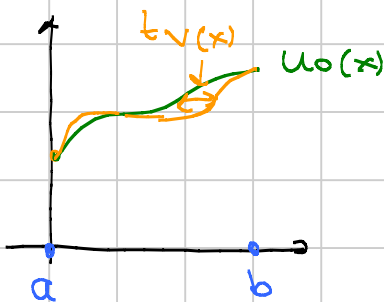
aggiungo / tolgo
in verticale

Interna o orizzontale : $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $v \in C_c^\infty((a, b))$

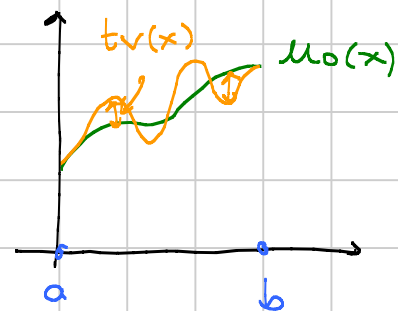
$$u(x + t v(x))$$

per $|t|$ suff. piccolo, l'argomento $\in [a, b]$
per ogni $x \in [a, b]$ (esercizio)

(qui è essenziale che $v \equiv 0$ in un intorno
dei 2 estremi)



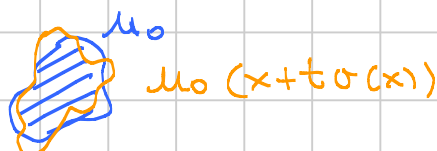
ORIZZ.



VERT.

Quando diventa essenziale la variazione interna?

- ① Quando sto considerando $u : [a, b] \rightarrow S^1$ o altra varietà (non posso aggiungere)
- ② Quando l'insieme X non sono funzioni, ma ad esempio sottoinsiemi del piano visti come funzioni caratteristiche



Esercizio Calcolare $\delta F(u, v)$ dove v agisce all'interno

$$\varphi(t) = \int_a^b L(x, u(x+t v(x)), \dot{u}(x+t v(x)) (1+t \dot{v}(x))) dx$$

dove ho usato che

$$\frac{d}{dx} u(x+t v(x)) = \dot{u}(x+t v(x)) (1+t \dot{v}(x))$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = & \int_a^b L_s(\dots) \dot{u}(x+t v(x)) v(x) + \\ & + \int_a^b L_p(\dots) \{ \ddot{u}(x+t v(x)) v(x) (1+t \dot{v}(x)) + \\ & \dot{u}(x+t v(x)) \dot{v}(x) \} \end{aligned}$$

Ponendo $t=0$ diventa

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = \delta_i F(u, v) = & \int_a^b L_s(x, u(x), \dot{u}(x)) \dot{u}(x) v(x) dx \\ & + \int_a^b L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) \{ \ddot{u}(x) v(x) + \dot{u}(x) \dot{v}(x) \} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{[\dot{u}(x) v(x)]'} \end{aligned}$$

Se posso integrare per parti ottengo

$$\delta_i F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]' \} \dot{u} v dx + \text{bordo}$$

Applicando se posso FLCV

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' \dot{u} = L_s(x, u, \dot{u}) \dot{u} \quad \begin{array}{l} \text{= vecchia ELE} \\ \text{mult. per } \dot{u} \end{array}$$

Oss. Mi dovevo aspettare che tutte le $u(x)$ costanti annullano $\varphi'(0)$ perché non è interessante fare variazioni orizz. di costanti 😊

ARGOMENTO DI TRONCAMENTO

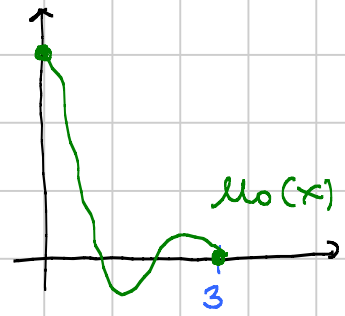
$$\min \left\{ \int_0^3 (\dot{u}^2 + u^2) dx : u \in C^1([0,3]), u(0)=5, u(3)=0 \right\}$$

$$(L_p)' = L_s$$

$$(2\dot{u})' = 2u \leadsto \ddot{u} = u + BC$$

risolvere è fatta.

Domanda: $u_0(x)$, il p.to di min., ha minimo prima di $x=3$ o in $x=3$?



Dico che $u_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,3]$

Brutal mode: ha senso per $u_0(x)$ andare sotto 0?

No! Una volta arrivato a 0, mi conviene tirare dritto e risparmiare sia di funzione sia di derivata.

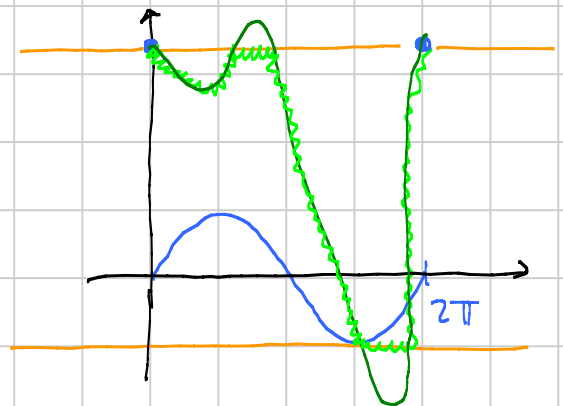
$$\text{Esempio 2} \quad \min \left\{ \int_0^{2\pi} [\dot{u}^2 + (u - \sin x)^2] dx, u(0)=5 = u(2\pi) \right\}$$

Voglio assomigliare a $\sin x$ pagando poco di derivata

$$\ddot{u} = u - \sin x$$

+BC

$\leadsto$ risolvere facile



Dico che $-1 \leq u_0(x) \leq 5$ per ogni $x \in [0, 2\pi]$

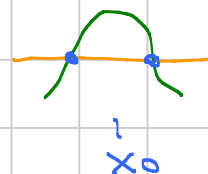
Moralmente: non conviene andare sopra/sotto, meglio troncare

Achtung! Se anche $u_0 \in C_c^\infty((0, 2\pi))$, non è detto che

$u_1(x) := \min\{u_0(x), 5\}$ sia C^4 a tratti (numero finito di tratti)

[esempio per esercizio]

Rigoroso 1 Sia $x_0 \in (0, 2\pi)$ t.c. $u(x_0) > 5$



$$\text{Pongo } x_1 := \sup \{x \in [0, x_0] : u_0(x) \leq 5\}$$
$$x_2 := \inf \{x \in [x_0, 2\pi] : u_0(x) \leq 5\}$$

A questo p.to sono sicuro che

$$u_0(x) \geq 5 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

e faccio il truncamento

$$\hat{u}_0(x) = \begin{cases} 5 & x \in [x_1, x_2] \\ u_0(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e verifico che risparmiavo.

Rigoroso 2 Sia x_0 un p.to di max di $u_0(x)$.

Se u_0 supera 5, allora di sicuro $x_0 \in (0, 2\pi)$ (interno), quindi

$$u''_0(x_0) \leq 0$$

Però da ELE segue che

$$u''_0(x_0) = u_0(x_0) - \sin x_0 \geq 5 - 1 = 4$$

Allo stesso modo dimostro che $u_0(x)$ non può scendere sotto -1

→ prendo x_0 p.to di min.

$$0 \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.to min}}}{u''_0(x_0)} = u_0(x_0) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } \leq -1}}{\sin x_0} < 0$$