

Funzionali integrali con integrali multipli

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto (decente)

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

↑ integrale in $\mathbb{R}^d$

$$L: \underbrace{\Omega}_X \times \underbrace{\mathbb{R}}_S \times \underbrace{\mathbb{R}^d}_P \rightarrow \mathbb{R} \quad u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Esempio classico: funzionale di DIRICHLET

$$F(u) := \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

↑ norma Euclidea

Integrazione per parti in $\mathbb{R}^d$ AKA Teorema della divergenza
AKA Gauss - Green

(vedi Istit. Analisi 2)

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx$$

prodotto scalare

↑
vettore normale
esterno a $\partial\Omega$

↑
integrale in
dim. $d-1$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\vec{E}(x) = (E_1(x), \dots, E_d(x)) \quad \operatorname{div} \vec{E} := \sum_{i=1}^d \frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i}$$

Variazione prima del Dirichlet

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= F(u+tv) = \int_{\Omega} |\nabla(u+tv)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2\end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx$$

1^a formula integrale

Applico Gauss - Green (se posso)

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) v dx + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\langle \vec{E}, \nabla f \rangle$ $\operatorname{div} \vec{E}$ f $\int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle$

$$= - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$$

Laplaciano

derivata direzionale
in direzione di $\vec{n}$

$$\Delta u := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

$$\delta F(u, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u v dx + 2 \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$$

2^a formula
cat.

Se supponiamo che u sia DLM rispetto ad ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (o qualunque altra classe di v nulle al bordo che cineschi il FLCV) allora u risolve

$$\Delta u = 0$$

ELE in forma diff.

— o — o —

Caso della Lagrangiana generale

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} L(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v) dx$$

Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale (me e v di classe C^1 , L di classe C^1 , Ω limitato), allora

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{\Omega} L_s(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v) v dx \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d L_{p_i}(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

Ponendo $t=0$ otteniamo

$$\delta F(u, v) = \int_{\Omega} \{ L_s(x, u, \nabla u) v + \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), \nabla v \rangle \} dx$$

$\uparrow$ gradiente di L
rispetto alle variabili p

Se integriamo per parti otteniamo

$$\delta F(u, v) = \int_{\Omega} \{ L_s(x, u, \nabla u) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) \} v dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), \vec{n} \rangle d\sigma$$

Se u è DLM rispetto ad una classe suff. ampia di v, allora

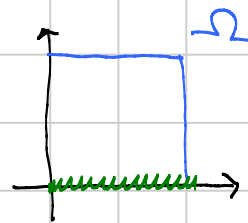
$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s(x, u, \nabla u)$$

ELE
differenziale

— o — o —

BC on the road $\Omega = (0,1)^2 = \text{quadrato in } \mathbb{R}^2$

$$\min \left\{ F(u) : u \in C^1(\bar{\Omega}), \underbrace{u(x,0) = x}_{\substack{\text{Dirichlet} \\ \text{DBC su un lato}}} \right\}$$



I competitori sono uno sp. affine $\times$ con sp. vet. di rif.

$$V = \{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \}$$

Supponiamo che u sia p.to di min. abbastanza regolare.
Allora

$$0 = \delta F(u, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx + 2 \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds$$

$\uparrow$ integrale curvilineo

• 1^a fase: uso sdo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e da FLCV ottengo

$$\boxed{\Delta u = 0} \quad \text{ELE}$$

• 2^a fase: ora so che $\int_{\Omega} = 0$ perché $\Delta u = 0$. Quindi

$$\int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \, ds = 0 \quad \forall v \in V$$

Facendo FLCV sugli altri 3 lati ottengo $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0$
per ogni x e altri 3 lati.

Conclusione: u deve risolvere

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{ELE} \\ u(x,0) &= x && \text{DBC dall'inizio} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(0,y) &= u_x(1,y) = 0 \quad \forall y \in [0,1] \\ u_y(x,1) &= 0 \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

NBC on the ROAD

Supponendo di saper risolvere il pbm. ELE + DBC + NBC, o supponendo di sapere che $u_0(x, y)$ è soluzione, allora dico che $u_0(x)$ è pto di min globale (unico!)

$$\begin{aligned}
 \underset{\times}{F(u)} &= F(\underset{\vee}{u_0 + v}) = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx &= F(u_0) \\
 &+ 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle dx &= 0 \quad \delta F(u_0, v) \\
 &+ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &\geq 0
 \end{aligned}$$

Vale $\ell' = 0$ se e solo se $\nabla v \equiv 0$, cioè $\Leftrightarrow v = \text{costante}$,
 ma grazie al lato sud di Ω $v \equiv 0$.

— 0 — 0 —