

COND. SUFFICIENTI DI MINIMALITÀ

- via convessità
- via funzionale ausiliario

Via convessità Consideriamo $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e il funzionale

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}) dx$$

Consideriamo il pbm. di minimo

$$\min \{ F(u) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

In questo caso ELE diventa $(L_p)' = L_s$

$$[\psi'(\dot{u})]' = 0 \quad \psi''(\dot{u}) \ddot{u} = 0$$

se ho abbastanza regolarità, ad esempio $\psi \in C^2$ e $u \in C^2$.
Tutte le rette risolvono, e c'è un'unica che rispetta DBC.

Sia $u_0(x)$ questa retta.

Domanda: è p.to di minimo?

Risposta:

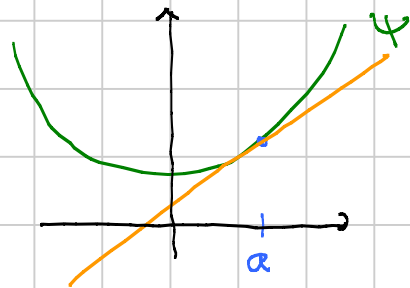
- se ψ è convessa, allora u_0 è p.to di min.
 - se ψ è strett. convessa, allora è pure l'unico.
- ↓ è meno che chiedere $\psi'' > 0$

Lemma Se $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + b \psi'(a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Se è strett. convessa, allora vale $>$ tutte le volte che $b \neq 0$.

[Geometricamente: ψ sta sopra le rette tangenti]



Dim (minimalità, usando il lemma)

Sia u_0 la retta, e sia $u(x)$ un altro competitor. Allora
 $u(x) = u_0(x) + v(x)$

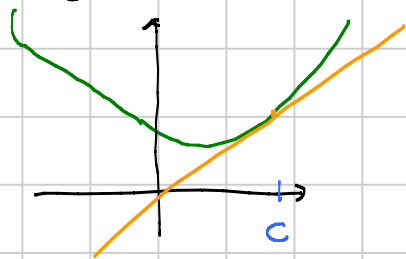
$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^b \psi(\underbrace{u_0(x)}_a + \underbrace{v(x)}_b) dx \geq \int_a^b \psi(u_0(x)) dx \\ &\quad + \int_a^b \psi'(u_0(x)) v(x) dx \\ &= F(u_0) + \int_a^b \underbrace{\psi'(c)}_{\substack{\uparrow \\ u_0 \equiv c}} v(x) dx \\ &= \psi'(c) [v(x)]_a^b = 0 \end{aligned}$$

Così ho dimostrato che $F(u) \geq F(u_0)$.

Se ψ è strett. convessa e $v \not\equiv 0$, allora esiste un pto, e quindi per continuità tutto un intervallo, in cui $v(x) \neq 0$.
Ma allora in quell'int. vale la disug. stretta tra le
integrande, e quindi tra gli integrali.

— o — o —

Oss. Affinché il p.to di min. sia davvero non unico, deve accadere che il coeff. ang. di $u_0(x)$ ricade all'interno di un tratto rettilineo del grafico di ψ , altrimenti è comunque unico.



Oss. La dim. + semplice del lemma usa Taylor-Lagrange

$$\psi(a+b) = \psi(a) + b \psi'(a) + \underbrace{\frac{1}{2} b^2 \psi''(\xi)}_{\geq 0}$$

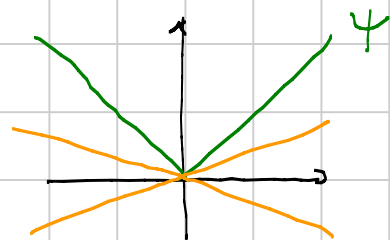
In realtà si dimostra anche (vedi Analisi 1) usando solo $\psi \in C^1$.

Volendo essere minimalisti, basta ψ convessa e basta, per scrivere il lemma nella forma

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + mb$$

$$\text{dove } m \in [\psi'_-(a), \psi'_+(a)]$$

derivate dx e sx in a, che
per ψ convessa esistono sempre!



Prendiamo Lagrangiana generale $L(x, s, p)$.

Mettiamo di avere regolarità C^2 .

Sia $u_0(x)$ una soluzione di ELE. È p.to di minimo?

Risposta: Sì, se per ogni $x \in [a, b]$ la funzione

$$(s, p) \rightarrow L(x, s, p)$$

è convessa in (s, p) . (nella coppia)

Dim. Si parte dalla disug.

$$L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) \geq L(x, s_0, p_0) + s_1 L_s(x, s_0, p_0) + p_1 L_p(x, s_0, p_0)$$

} stare sopra il piano tangente

$$\begin{aligned} F(u_0 + v_0) &= \int_a^b L(x, u_0 + v_0, \dot{u}_0 + \dot{v}_0) dx \\ &\geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) dx \sim F(u_0) \\ &\quad + \underbrace{\int_a^b \{v_0 L_s(x, u_0, \dot{u}_0) + \dot{v}_0 L_p(x, u_0, \dot{u}_0)\} dx}_{=0 \text{ se } u_0 \text{ verifica 1}^\circ \text{ forma integrale di Eulero}} \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Valgono opportune varianti con stretta convessità

— o — o —

Teorema (Minimalità via funzionale ausiliario)

Sia S un insieme, siano $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: S \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni, e sia $x_0 \in S$.

Supponiamo che

- (i) $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in S$ (F sopra G)
- (ii) $G(x) \geq G(x_0)$ " " " (x_0 p.to di min. per G)
- (iii) $F(x_0) = G(x_0)$

Allora x_0 è p.to di min per F

Dim Per ogni $x \in S$ vale

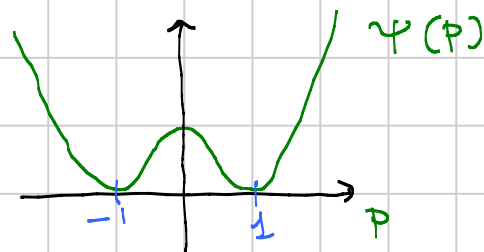
$$F(x) \underset{(i)}{\geq} G(x) \underset{(ii)}{\geq} G(x_0) \underset{(iii)}{=} F(x_0).$$

Esempio 1 (Doppio pozzo)

$$\psi(p) = (p^2 - 1)^2$$

$$F(u) = \int_0^1 (\ddot{u}^2 - 1)^2 dx$$

$$\min \{ F(u) : u(0) = 1, u(1) = 2 \}$$

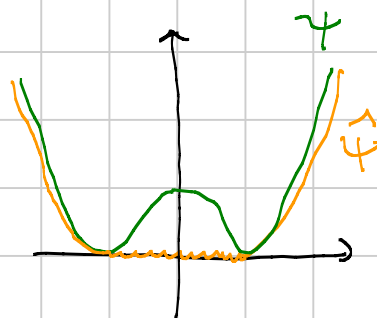


La retta $u_0(x) = x+1$ risolve ELE e rispetta DBC.
È p.to di min. ? Sì, anche se ψ non è convessa

Considero $\hat{\psi}$ ottenuta "convessificando"

Ora $\hat{\psi}$ è convessa. Pongo

$$G(u) := \int_0^1 \hat{\psi}(\ddot{u}) dx$$



e applico il lemma. Le ipotesi sono verificate

(i) perché $\psi \geq \hat{\psi}$ ovunque

(ii) perché $\hat{\psi}$ è convessa

(iii) " $\hat{\psi}(1) = \psi(1)$.

— o — o —

Oss. Si poteva fare una dim. alternativa riciclando la dim del caso convesso dopo aver osservato che ψ sta sopra la retta tangente in $p=1$

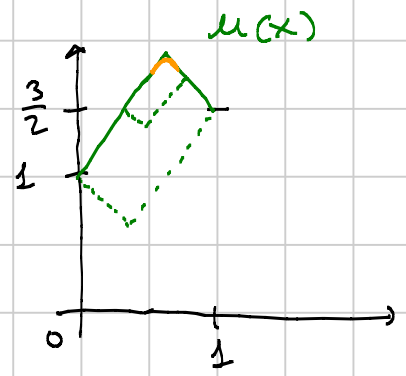
$$\text{Esempio 2} \quad \min \{ F(u) : u(0) = 1, u(1) = \frac{3}{2} \}$$

Ora la retta è $1 + \frac{x}{2}$, quindi coeff. ang. = $\frac{1}{2}$

In questo il minimo non esiste, e l'inf. è 0.

"Basta" prendere una u che abbia come derivata solo ± 1

Usando che l'inf nelle C^1 o nelle C^2 a tratti è lo stesso, segue che l'inf. è 0.



"Un piccolo raccordo" costa poco in termini di energia.

— o — o —