

Tutte le forme di ELE

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

$$L: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad L(x, s, p)$$

Obiettivo: calcolare la variazione prima.

$$\varphi(t) := F(u + tv) = \int_a^b L(x, u(x) + tv(x), \dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) dx$$

A dx abbiamo un integrale dipend. da parametro. Sotto opportune ipotesi (vedi Analisi 2) abbiamo che

$$\varphi'(t) = \int_a^b \{ L_s(x, u(x) + tv(x), \dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) v(x) + L_p(x, u(x) + tv(x), \dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) \dot{v}(x) \} dx$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

1^a forma integrale di Eulero

Teorema Supponiamo che

- L sia C^1 nelle 3 variabili (ma basta un po' meno)
- u e v siano C^1 in x (indip. dai dati al bordo)

Allora $\delta F(u, v)$ esiste e si scrive come sopra

Due. Osservare che posso derivare l'integrale parametrico.

— o — o —

Integrando per parti il termine con $\dot{v}$ otteniamo

$$\int_a^b L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} dx = [L_p(x, u, \dot{u}) v]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b [L_p(x, u, \dot{u})]' v dx$$

e quindi

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]' \} v + [L_p(x, u, \dot{u}) v]_{x=a}^{x=b}$$

2^a forma
integrale di
Eulero

Teorema Supponiamo che

- L sia C^2 nelle 3 variabili, (ma basta meno)
- u sia C^2 in $[a, b]$,
- v sia C^1 in $[a, b]$.

Allora $\delta F(u, v)$ si scrive come sopra.

Dim. Oss. che posso integrare per parti.

— o — o —

Ponenterà sui p.ti di min.

Sia X sp. aff. con V vett. di riferimento. Sia $u_0 \in X$ e

sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Dico che u_0 è DLM (directional local minimum) per F se per ogni $v \in V$ la funzione

$$F(u_0 + tv)$$

ha un min. loc. per $t=0$.

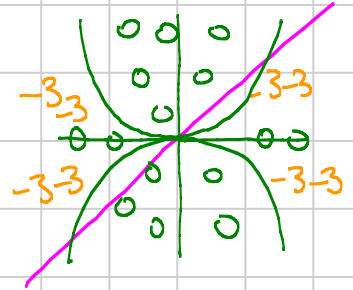
Più in generale, se $W \subseteq V$ è un s.sp. vettoriale, posso dire cosa vuol dire che u_0 è DLM rispetto alle direzioni W .

Prop. Nelle ipotesi di sopra, se u_0 è DLM risp. alle dir. W , allora

$$\delta F(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in W$$

purché esista (o non esista, o si annulla).

Oss. I soliti esempi di Analisi 2 dicono che DLM $\nRightarrow$ min loc



— o — o —

Torniamo al funzionale di sopra, e supponiamo che u_0 sia DLM rispetto ad una classe W di funzioni nulle al bordo e tali da immettere il FLCV, ad esempio

$$W = C_c^\infty(a, b)$$

$$W = C^1([a, b]) \text{ nulle in } a \text{ e } b$$

Allora nelle ipotesi del 2° teorema deve accadere che

$$[L_p(x, u_0, \dot{u}_0)]' = L_s(x, u_0, \dot{u}_0)$$

ELE (in forma diff.)

Il LHS espanso diventa

$$L_{px}(x, u_0, \dot{u}_0) + L_{ps}(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{u}_0 + L_{pp}(x, u_0, \dot{u}_0) \ddot{u}_0$$

Se in aggiunta, oltre alle v precedenti, posso permettermi anche delle v che si annullano in un estremo, ma non nell'altro allora nascono delle NBC del tipo

$$L_p(x, u_0, \dot{u}_0) = 0$$

per $x=a$ oppure $x=b$

— o — o —

ELE in forma DBR Ripartiamo dalla 1ª forma integrale

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

Integriamo per parti il 1º termine. Poniamo

$$\Lambda(x) := \int_a^x L_s(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

Allora

$$\int_a^b L_s(x, u, \dot{u}) v dx = [\Lambda(x) v(x)]_a^b - \int_a^b \Lambda(x) \dot{v}(x) dx$$

Supponiamo che u_0 sia DLM rispetto a $C_c^\infty(a, b)$ (ma si può generalizzare a classi più piccole). Allora

$$0 = \delta F(u_0, v) = \int_a^b \{ -\Lambda(x) + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \} \dot{v} dx \quad \forall v \in \dots$$

Usando il Lemma DBR ottengo che

$$L_p(x, u_0, \dot{u}_0) = c + \Lambda(x)$$

$$= c + \int_a^x L_s(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) dt$$

Si usa solo
 L e u_0
di classe C^1

Oss. → Eq. diff. e integrale di ordine 1, però anche c è un parametro libero

→ Si può ottenere banalmente integrando la ELE precedente, ma per farlo servirebbero più ipotesi su L e u_0 .

— o — o —

ELE in forma ERDMANN

Supponiamo L non dipenda dalla variabile x (caso autonomo)
Allora ELE classica diventa

$$[L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u})$$

Moltiplico a dx e sx per $\ddot{u}$:

$$\ddot{u} [L_p(u, \dot{u})]' = \ddot{u} L_s(u, \dot{u})$$

$$[\ddot{u} L_p(u, \dot{u})]' - \ddot{u} L_p(u, \dot{u})$$

Riorganizzando viene

$$[\ddot{u} L_p(u, \dot{u})]' = \ddot{u} L_p(u, \dot{u}) + \ddot{u} L_s(u, \dot{u}) = [\ddot{u} L(u, \dot{u})]'$$

↑ qui uso L autonoma

ma allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\ddot{u} L_p(u, \dot{u}) = c + L(u, \dot{u})$$

Oss. Questa è eq. diff. di ordine 1, con un parametro c libero.

Question

Si potrà ricavare usando unicamente ipotesi C^1 su L e u .

Achtung! Se u risolve ELE classica, allora u risolve ELE Erdmann.

Non vale il viceversa (tutte le u costanti risolvono ELE Erdmann).

ELE con dipendenza da derivate successive

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots) dx \quad L(x, s, p_1, p_2, \dots)$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \left\{ L_s(x, u, \dots) v + \sum_{i=1}^n L_{p_i}(x, u, \dots) v^{(i)} \right\} dx$$

Quando integro per parti, se NON ho termini di bordo...

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \left\{ L_s(x, u, \dots) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} L_{p_i}(x, u, \dots) \right\} v$$

Da qui se le derivate sono abbastanza possiamo ottenere ELE in forma diff.

— o — o —

Esempio per ordine 2

$$[L_{p_1}(x, u, \dot{u}, \ddot{u})]' - [L_{p_2}(x, u, \dot{u}, \ddot{u})]'' = L_s(x, u, \dot{u}, \ddot{u})$$