

Nascita delle BC (Boundary Conditions)

$$F(u) = \int_0^1 [\ddot{u}^2 + (u-x)^2] dx$$

Morale: si vuole avere poca derivata e "assomigliare a x"

Esempio 1 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]), u(0)=2, u(1)=5 \}$

* è sp. aff. con sp. vett. di rif.

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0 \}$$

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^1 [\ddot{u}^2 + 2t\ddot{u}\ddot{v} + t^2\ddot{v}^2 + (u+tv-x)^2] dx$$

= ... pol. di 2° grado in t $\leadsto$ calcolo $\varphi'(0)$

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} dx + 2 \int_0^1 (u-x) v dx$$

Eulero 1ª forma integrale: $\quad \quad \quad = 0$

" 2ª forma integrale

$$\int_0^1 (-\ddot{u} + u - x) v dx = 0 \quad (\text{ho integrato per parti})$$

$$FLCV \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = 2 \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

Si verifica che il pbm. ha sol. unica (Analisi 1)

$$u(x) = a \cosh x + b \sinh x + x$$

Imponendo le BC trovo in modo unico a e b.

In bella copia considero la soluzione $u_0(x)$ appena trovata e dimostro che è l'unico p.to di univ. poiché

$$F(u) = F(u_0 + tv) = \dots \text{ conti } \dots$$

$$= F(u_0) + 2t \underbrace{\left\{ \int_0^1 [\ddot{u}_0 v + (u_0 - x)v] dx \right\}}_{=0 \text{ perché integrale per parti e } u_0 \text{ cosa risolve } u_0} + t^2 \underbrace{\int_0^1 [v^2 + \dot{v}^2]}_{\geq 0 \text{ sempre e } =0 \Leftrightarrow \dots}$$

Achtung! L'eq. che abbiamo trovato per u_0 NON è un pbm. di Cauchy, quindi NESSUNO garantisce esistenza ed unicità della soluzione (vedi Ser. 2018/19)
[Nell' esempio di sopra bastava scrivere il sistema]

Esempio 2 $\text{min} \{ F(u) : u \in C^1 \dots, u(0) = 2 \}$
 $\uparrow$ condizione in un solo estremo

Questa volta $V = \{ v \in C^1 \dots : v(0) = 0 \}$

Come prima arrivo alla prima forma di Eulero

$$\int_0^1 \ddot{u} \dot{v} + \int_0^1 (u - x)v = 0 \quad \forall v \in V$$

Integro per parti, ma occhio al bordo

$$[\dot{u} v]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 [-\ddot{u} + (u - x)] v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

$$= \dot{u}(1) v(1)$$

Procedo in due fasi

- Fase 1: Considero solo $v \in V$ che soddisfanno anche $v(1) = 0$
Esattamente come prima deduco

$$\ddot{u} = u - x$$

- Fase 2: dalla fase 1 so che l'integrale sopra è $= 0$ e quindi la cond. è diventata

$$\ddot{u}(1)v(1) = 0$$

Basta prendere $v \in V$ con $v(1) \neq 0$ (e ce ne sono) per dedurre che $\ddot{u}(1) = 0$.

Ho ottenuto

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = 2 & \text{c'era dall'inizio} & \text{DBC} \\ \ddot{u}(1) = 0 & \text{nata on the road} & \text{NBC} \end{cases}$$

<u>Notazione</u>	DBC (DIRICHLET)	$u(\text{estremo}) = q.c.$
	NBC (NEUMANN)	$\ddot{u}(\text{estremo}) = q.c.$

Non è ovvio che c'è soluzione unica, ma va dimostrato facendo i conti.

Al solito modo si conclude che l'unica sol. $u_0(x)$ è l'unico p.to di min (fatto!)

Esempio 3 min $\{F(u) : u \in C^1([0,1])\}$

L'idea è che on the road nascono due NBC

$$\ddot{u}(1)v(1) - \ddot{u}(0)v(0) + \int_0^1 [-\ddot{u} + (u-x)]v \, dx = 0$$

Fase 1: uso v nulle al bordo e ottengo ELE $\ddot{u} = u - x$

Fase 2: ho che

$$\ddot{u}(1)v(1) - \ddot{u}(0)v(0) = 0$$

Ora basta scegliere $v \in V$ t.c. $v(1) = 1$ e $v(0) = 0$
 $v(1) = 0$ e $v(0) = 34$

Conclusione Come sempre

Esempio 4

$$\min \{ F(u) : \underbrace{u(0) = u(1)}_{\times \text{ è sp. vett.}} \}$$

Come prima arrivo a

$$v(0) \{ \dot{u}(1) - \dot{u}(0) \} + \int_0^1 \text{ solito } = 0$$

↑
ho raccolto perché $v(0) = v(1)$

$$\text{Alla fine ottengo } \begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases} \begin{array}{l} \text{all'inizio} \\ \text{on the road} \end{array} \left. \vphantom{\begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{PBC} \\ \uparrow \\ \text{periodic} \end{array}$$

Esempio 5

$$\min \{ F(u) : \underbrace{\int_0^1 u(x) dx = 7}_{\times}$$

$$\times \text{ è sp. aff. con } V = \{ v \in C^1([0,1]) : \int_0^1 v(x) dx = 0 \}$$

Con i conti soliti arrivo a

$$\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0) + \int_0^1 [-\ddot{u} + (u-x)]v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

- Fase 1 Diminuiamo alle $C_c^\infty((0,1))$ a media nulla
ottengo $-\ddot{u} + (u-x) = \lambda$
 $\uparrow$ anche bene anche C^1 nulle al bordo
 $\uparrow$ costante che viene dal DBR

- Fase 2 : ottengo le NBC

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x + \lambda \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = 1 \\ \int_0^1 u(x) dx = 7 \end{cases} \rightsquigarrow u(x) = ae^x + be^{-x} + x - \lambda$$

e spero con le 3 condizioni di trovare univocamente a, b, λ .
[Provare per esercizio].

Esempio 6 $F(u) = \int_0^1 (\ddot{u}^2 + (u-x)^2) dx = 0$

$\min \{ F(u) : u(0) = 7 \}$

... Soliti convenevoli ...

$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^1 (\ddot{u} + t\ddot{v})^2 + (u+tv-x)^2 dx = 0$

$\delta F(u,v) = \varphi'(0) = 2 \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} + 2 \int_0^1 (u-x)v dx$

Provo a integrare per parti (tolgo i 2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} &= [\ddot{u} \dot{v}]_0^1 - \int_0^1 \ddot{u} \dot{v} dx \\ &= [\ddot{u} \dot{v}]_0^1 - [\ddot{u} v]_0^1 + \int_0^1 u^{(4)} v dx \end{aligned}$$

In conclusione la 2^a forma int. di Eulero è

$$\delta F(u,v) = \int_0^1 [u^{(4)} + (u-x)] v dx + \ddot{u}(1) \dot{v}(1) - \ddot{u}(0) \dot{v}(0) + \cancel{\ddot{u}(0) v(0)} - \cancel{\ddot{u}(1) v(1)}$$

per def. di V

• Fase 1 Usando C_2^∞ ottengo $u^{(4)} = -u+x$ ELE
Mi aspetto 4 BC

• Fase 2 Scegliendo bene le v ottengo il plan

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(4)} = -u+x \\ u(0) = 7 \\ \ddot{u}(0) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{DBC dall'inizio} \\ \text{Note on the} \\ \text{load} \end{array}$$

→ Ordine eq = 2. ordine
derivate nel funzionale
→ 2 BC per estremo