

FLCV: Fundamental Lemma in the Calculus of Variations

FLCV a media nulla

Lemma DBR - Du Bois-Reymond

FLCV (caso classico) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

funzione test

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

a supporto compatto

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$

cioè $\text{clos}\{x \in \Omega: \varphi(x) \neq 0\}$
è un cpt. contenuto in Ω

FLCV (caso Lebesgue) Tutto uguale, ma assumo solo

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

cioè $f \in L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$

richiesta minimale per dare
senso all'ipotesi

$\text{clos}(\Omega')$ è cpt. $\subseteq \Omega$.

FLCV a media nulla Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

continua (caso classico) oppure $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (caso Lebesgue)

Supponiamo che $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

a media nulla, cioè t.c. $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$.

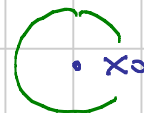
Allora $f(x)$ è costante in Ω , cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = c$
per ogni $x \in \Omega$ (caso classico) o per quasi ogni $x \in \Omega$ (caso L.)

Dim (FLCV caso classico) Per assurdo.

Se fosse falso, allora WLOG (without loss of generality) esiste $x_0 \in \Omega$ t.c.

$$f(x_0) = \alpha > 0$$

Per continuità esiste $r > 0$ t.c.



$$f(x) \geq \frac{\alpha}{2} \quad \forall x \in \overline{B}(x_0, r)$$

Ora basta considerare $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.c.

- $\varphi(x) = 0$ se $x \notin B(x_0, r)$
- $\varphi(x) = 1$ se $x \in B(x_0, \frac{r}{2})$
- $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ per ogni $x \in \Omega$

} esercizio di
Analisi 2

A questo p.to

$f \circ \varphi \geq 0$ in $B(x_0, r)$

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx = \int_{B(x_0, r)} f(x) \cdot \varphi(x) dx \geq \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} f(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$\varphi(x) = 0$ fuori

$$\geq \frac{\alpha}{2} \text{ meas}(B(x_0, \frac{r}{2}))$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \varphi(x) \equiv 1 \\ f(x) \geq \frac{\alpha}{2} \end{matrix} \text{ in } B(x_0, \frac{r}{2})$$

Idea per caso Lebesgue: se

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \text{io vorrei tanto prendere } \varphi(x) = f(x)$$

Non posso, ma quasi con un procedimento di approssimazione.

Dim (FLCV caso Lebesgue) Considero un qualunque $\Omega' \subset \subset \Omega$ (basta anche una palla). Dico che esiste una successione

$\{\varphi_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega')$ tale che

- $-1 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \Omega'$
- $\varphi_m(x) \rightarrow \text{sign}(f(x))$ per quasi ogni $x \in \Omega'$

Dato per buono questo, sappiamo per ipotesi che

$$\int_{\Omega'} f(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

è come fosse Ω

↪ convergenza dominata

$$\int_{\Omega'} f(x) \cdot \operatorname{sign}(f(x)) dx = 0$$

"

$$\int_{\Omega'} |f(x)| dx$$

Dall'essere l'ultimo $= 0$ segue la tesi, cioè $f = 0$ q.o. in Ω' e concludo perché Ω' è arbitrario.

— 0 — 0 —

Idea per il caso a media nulla

Se vale $\int f \varphi = 0 \quad \forall \varphi$ a media nulla, allora vale

$$\int (f - c) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \text{ a media nulla}$$

Scego c t.c. $\int (f - c)$ abbia media nulla e poi "uso" $\varphi = f - c$.

Per la prima richiesta vorrei porre

$$c = \text{media di } f = \frac{1}{\operatorname{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx$$

↑
non so se
è finita

↑
non ho assunto
che esista

— 0 — 0 —

Dim FLCVa media nulla Fisso $\Omega' \subset \subset \Omega$ e pongo

$$c = \frac{1}{\operatorname{meas}(\Omega')} \int_{\Omega'} f(x) dx$$

In questo modo $f - c$ ha media nulla in Ω'

Adesso scelgo d tale che $\text{sign}(f(x)-c) - d$ abbia media nulla in Ω' .

Ora scelgo $\{\varphi_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega')$ tali che

- $-1-d \leq \varphi_m(x) \leq 1-d$ sempre
- $\varphi_m(x) \rightarrow \text{sign}(f(x)-c) - d$ per q.o. $x \in \Omega'$
- $\varphi_m(x)$ abbiano media nulla in Ω' .

Se ci riesce, allora

$$0 = \int_{\Omega} (f(x)-c) \varphi_m(x) dx = \int_{\Omega'} (f(x)-c) \varphi_m(x) dx$$

e passando al limite ottengo

$$\int_{\Omega'} (f(x)-c) \cdot [\text{sign}(f(x)-c) - d] dx = 0$$

"

$$\int_{\Omega'} |f(x)-c| dx - d \underbrace{\int_{\Omega'} (f(x)-c) dx}_0 = 0$$

Da questo segue che $f(x) \equiv c$ quasi ovunque in Ω' e concludo per l'arbitrarietà di Ω' .

(Ocdio: non è del tutto ovvio perché c dipende da Ω')

Dim classica

Se non fosse vero, esisterebbero due p.ti $x_0 \in \Omega$ e $y_0 \in \Omega$, ed esisterebbe $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0) - c = \alpha > 0$$

$$f(y_0) - c = -\alpha < 0$$

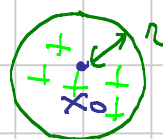
Uso una φ che è

+ in $B(x_0, r)$

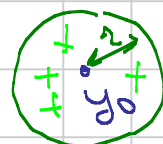
- in $B(y_0, r)$

o altrove

"simmetrica" in modo da avere media nulla.



$$f - c > 0$$



$$f - c < 0$$

Lemma DBR Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua oppure $L^1_{loc}((a,b))$.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$$

Allora f è costante (eventualmente q.o.) in (a,b) .

Dim. abusiva Integro per parti

$$0 = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx$$

$$\text{FLCV} \Rightarrow f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \text{ costante}$$

Dim vera Osservo il seguente fatto fondamentale

$$\{ \varphi' : \varphi \in C_c^\infty((a,b)) \} = \{ \varphi \in C_c^\infty((a,b)) : \int_a^b \varphi = 0 \}$$

Per creare la corrispondenza basta fare la primitiva.

Oss. In tutti questi lemmi posso sostituire $C_c^\infty((a,b))$ con una qualunque classe V tale che.

Basta che possa approx. puntualmente q.o. e in maniera equiunitata il segno mediante funzioni che stanno in V , o anche solo in $\text{Span}(V)$.