

Funzionali integrali

Cinque sinonimi : $\rightarrow$ Funzione

$\rightarrow$ Funzionale (partenza: sp. di funzioni, arrivo $\mathbb{R}$)

$\rightarrow$ Mappa

$\rightarrow$ Applicazione (retrogrado linearità)

$\rightarrow$ Operatore (roba strana in partenza ed arrivo)

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

sul bordo le derivate
sono dx e dx

$\mathbb{X} = \{ u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \text{ t.c.} \}$

$u(a) = A, u(b) = B$

dati

$F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

dove $L: (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con una certa regolarità.

LAGRANGIANA

posizione

Di solito si indica con $L(x, \overset{\downarrow}{s}, \overset{\uparrow}{p})$

velocità

Esempi superclassici

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}(x)^2 dx$$

$$G(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)| dx$$

$$H(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|^{1/2} dx$$

Esempio 1

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}(x)^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{u \in C^1([0,1]), u(0)=3, u(1)=7}_{\times} \right\}$$

$\times$ è uno sp. affine con sp. vett. di riferimento

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0 \}$$

Quindi posso calcolare $\varphi(t) = F(u + tv)$

$$\varphi(t) = \int_0^1 [\dot{u}(x) + t \dot{v}(x)]^2 dx = \int_0^1 \dot{u}(x)^2 + 2t \int_0^1 \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^1 \dot{v}^2$$

La derivata in t si calcola banalmente

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = 2 \int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx$$

SE $u_0(x)$ è un p.to di min., allora $\delta F(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$, cioè

$$\boxed{\int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx = 0}$$

$$\forall v \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } v(0) = v(1) = 0$$

prima forma integrale dell'eq. di EULERO

Integro per parti e ottengo

$$\underbrace{[\dot{u}(x) v(x)]_0^1}_0 - \int_0^1 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0$$

perché $v(0) = v(1) = 0$

↑ Sarebbe sapere $u \in C^2$, ma
ME NE FREGO

$$\boxed{\int_0^1 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V}$$

2ª forma integrale
di Eulero

Da questa vorremmo dedurre che

$$\ddot{u}(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ELE in forma diff.

ELE : Equazione di EULERO - LAGRANGE

Il passaggio è abusivo, ma ME NE FREGO.

Risolve $\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ u(0) = 3 \\ u(1) = 7 \end{cases}$ ELE diff. cond. date BC (Boundary Conditions)

Esiste un'unica soluzione $u_0(x) = 4x + 3$

Dimostro rigorosamente che $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Ogni altro competitor $u \in \mathbb{X}$ lo posso scrivere come

$$u(x) = u_0(x) + v(x) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ v \in V \end{matrix} \quad v = u - u_0$$

Allora

$$\begin{aligned} F(u_0 + v) &= \int_0^1 (\dot{u}_0(x) + \dot{v}(x))^2 dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \dot{u}_0(x)^2 dx}_{F(u_0)} + \underbrace{2 \int_0^1 \dot{u}_0(x) \dot{v}(x) dx}_0 + \underbrace{\int_0^1 \dot{v}(x)^2 dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

0 perché $u_0(x)$ risolve la 1° forma integrale di Eulero

(ora i passaggi sono giustificati)

$$\geq F(u_0)$$

e vale il segno di uguale se e solo se $\int_0^1 \dot{v}(x)^2 dx = 0$

il che accade se e solo $\dot{v}(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, cioè $v(x)$ costante, cioè $v(x) \equiv 0$ perché $v(0) = v(1) = 0$.
Questo dim. che u_0 è l'unico p.to di min.

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^1 |\dot{u}(x)| dx : u \in \mathbb{X} \text{ di prima} \right\}$

$$u(1) - u(0) = \int_0^1 \dot{u}(x) dx \leq \int_0^1 |\dot{u}(x)| dx = G(u)$$

Questo dimostra che $G(u) \geq u(1) - u(0) = 4$
e vale l'uguaglianza se e solo se $\dot{u}(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, 1]$
(dimostrare per bene che è un se e solo se).

Quindi la retta $u_0(x) = 4x + 3$ è UN p.to di min, ma ce ne sono infiniti altri.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 |\dot{u}(x)|^{1/2} dx : u \in \mathbb{X} \text{ di prima} \right\}$

Si può dimostrare che min non esiste e $\inf = 0$.

(se $\inf = 0$, è ovvio che min N.E. perché dovrebbe essere cost.)

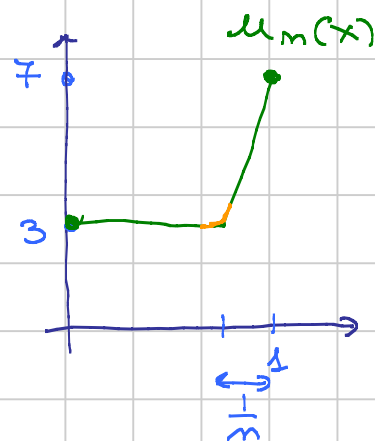
Per dim. $\inf = 0$, trovo succ. ϵ -fittante.

Fregandosene che $u_n(x)$ non è C^1 ,
calcolo

$$H(u_n) = \int_0^1 |\dot{u}_n(x)|^{1/2} dx$$

$$= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |4n|^{1/2} dx = 2\sqrt{n} \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\uparrow$ lunghezza intervallo



Per avvicinare alla non C^1 -ità, basta fare un piccolo raccordo dalle parti di $1 - \frac{1}{n}$ (sistemare i dettagli).

Punto della situazione: Lagrangiane che dipendono solo da p

$L(p) = p^2$ esistenza e unicità STRETT. CONV. 😊

$L(p) = |p|$ esist. senza unicità CONV. NON STRETT. → guai

$L(p) = \sqrt{|p|}$ Non esistenza NON CONV. ☹️

Spazi di ambientazione

Se invece di lavorare in $C^1([0,1])$ lavoro in $C^0([0,1]) + C^1$ a tratti, cambia qualcosa?

Risposta: sotto ipotesi decenti NO, nel senso che l'inf. è lo stesso.

Lemma di approx. Data $u \in C^1$ a tratti in $[a,b]$
esiste $\{u_m\}$ successione di funzioni davvero C^1 t.c.
 $u_m \rightarrow u$ unif. in $[a,b]$
 $\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}$ framme in un numero finito
di punti
 $\{u_m(x)\}$ equilimitate

Se $L(x, s, p)$ è continua, questo basta per concludere che

$$\int_a^b L(x, u_m(x), \dot{u}_m(x)) dx \rightarrow \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

e questo dice che gli inf. sono uguali.
— o — o —