

A.A. 2019/2020
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 47. Operatori compatti ed operatori simmetrici. Continuità strong-strong per operatori lineari compatti. Continuità weak-strong per operatori lineari compatti e simmetrici. Quoziente di Rayleigh. Caratterizzazione variazionale di autovalori/autovettori.	6
Lezione 48. Teorema spettrale per operatori compatti. Esempio di operatore lineare simmetrico senza autovalori.	12
Lezione 49. Limite uniforme sui limitati di operatori compatti è compatto. Approssimazione di operatori compatti in spazi di Hilbert. Proiezione non-lineare e approssimazione non-lineare di operatori compatti in spazi normati.	18
Lezione 50. Dal teorema di punto fisso di Brouwer al teorema di punto fisso di Schauder. Controesempio al teorema di Brouwer in dimensione infinita. Dimostrazione del teorema di sola esistenza per equazioni differenziali mediante il teorema di punto fisso di Schauder.	24
Lezione 51. Caratterizzazioni della continuità per applicazioni lineari tra spazi normati. Pseudo-norme e teorema di Hahn-Banach. Funzionale allineato. Discussione dell'esistenza di applicazioni lineari continue e non continue tra spazi normati. . .	29
Lezione 52. Esempio di non unicità del funzionale allineato. Spazio degli operatori lineari tra due spazi normati. Norma di un operatore. Duale topologico di uno spazio normato. Caratterizzazione duale della norma.	36
Lezione 53. Definizione di convergenza debole (in uno spazio normato) e debole* (nel suo duale). Semicontinuità debole della norma. Debole* compattezza delle palle nei duali di spazi separabili. Separazione di insiemi mediante iperpiani: definizioni, enunciati, controesempi.	42
Lezione 54. Pseudo-norma associata ad un convesso. Dimostrazione dei teoremi di separazione debole/stretta (forme geometriche di Hahn-Banach). Chiusura forte + convessità implica chiusura debole.	48
Lezione 55. Descrizione dei comuni spazi di successioni: l_p , successioni infinitesime, successioni con limite all'infinito, successioni definitivamente nulle. Duality pairing tra successioni. Duale di l_1 e di l_p	54

- Lezione 56.** Duale delle successioni infinitesime, delle successioni definitivamente nulle, e delle successioni con limite all'infinito. Nel caso di l -infinito il duality pairing con l_1 è un'isometria non surgettiva. Elementi del duale di l -infinito che coincidono con il limite quando questo esiste. 60
- Lezione 57.** Duality pairing tra funzioni. Duale degli spazi L_p su spazi di misura finiti via teorema di Radon-Nikodym: caso di L_1 e primi step del caso L_p con p finito. . 66
- Lezione 58.** Fine della caratterizzazione del duale di L_p con p finito. Immersione isometrica di L_1 nel duale di L -infinito. Duale degli spazi di Hilbert: dimostrazione via base ortonormale e via proiezione su un convesso chiuso. Paradosso derivante dall'identificazione di uno spazio di Hilbert con il suo duale. 73
- Lezione 59.** Biduale e definizione di spazio riflessivo. Compattezza debole delle palle negli spazi riflessivi con duale separabile. Realizzazione del sup nella definizione di norma di un elemento del duale. Esempi in cui la norma di un operatore è un sup e non un max. Legami tra la separabilità di uno spazio e del suo duale. 79
- Lezione 60.** Duale degli spazi L_p in spazi di misura sigma-finiti. Ruolo dei teoremi di rappresentazione del duale nella dimostrazione della compattezza debole delle palle in L_p . Separabilità di uno spazio vs separabilità del duale. Approccio alla Lax-Milgram per l'esistenza di soluzioni deboli per equazioni ellittiche lineari. Semicontinuità forte + convessità implica semicontinuità debole. Variante del teorema di Weierstrass per funzioni divergenti all'infinito. 85
- Lezione 61.** Spazi di Baire: definizioni equivalenti. Gli spazi metrici completi e gli spazi localmente compatti sono spazi di Baire. Gli aperti negli spazi di Baire sono spazi di Baire. Primo esempio di utilizzo degli spazi di Baire. 91
- Lezione 62.** Insiemi F -sigma e G -delta. L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione tra spazi metrici è un F -sigma. Gli irrazionali non sono un F -sigma. Una funzione di due variabili separatamente continua e nulla in un denso è identicamente nulla. Le successioni debolmente convergenti negli spazi di Hilbert o normati sono limitate. 97
- Lezione 63.** Non esistono spazi di Banach con base algebrica numerabile. I sottospazi di dimensione finita di uno spazio normato sono chiusi. Esistenza di funzioni continue non derivabili in nessun punto. Teorema di Banach-Steinhaus (come equivalenza e come alternativa). Limite puntuale di operatori lineari e continui è lineare e continuo. 103
- Lezione 64.** Dimostrazione(i) del teorema di Banach-Steinhaus. Esistenza di un G -delta denso di funzioni continue e periodiche la cui serie di Fourier non converge in un G -delta denso di punti. 109
- Lezione 65.** Caratterizzazione delle mappe surgettive in termini di risolubilità qualitativa. Caratterizzazione delle mappe aperte in termini di risolubilità quantitativa. Esistenza di solver qualitativi lineari per mappe lineari surgettive. Teorema della mappa aperta. Corollari: continuità dell'inversa, equivalenza di norme, teorema del grafico chiuso. 115

- Lezione 66.** Ogni vettore è somma di una serie assolutamente convergente a valori in un denso. Risolubilità quantitativa su un denso vs risolubilità quantitativa ovunque. Esistenza di un solver lineare quantitativo vs esistenza di un supplementare topologico. Caso degli spazi di Hilbert. 122
- Lezione 67.** Il limite puntuale di funzioni continue è continuo in un G-delta denso. La derivata di una funzione derivabile è continua in un G-delta denso. Operatori non limitati. Caso di un operatore diagonale rispetto ad una base ortonormale in uno spazio di Hilbert. Potenze di un operatore. Operatori non limitati con inverso compatto. 127
- Lezione 68.** Esempio fondamentale di operatore non limitato: derivata seconda con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee. Compattatezza dell'inverso e calcolo di autovalori/autovettori. Estensione al caso Neumann e periodico. 132
- Lezione 69.** Calcolo del dominio della potenza $1/2$ della derivata seconda con condizioni di Dirichlet in un intervallo. Continuità delle funzioni nello spazio di Sobolev frazionario H^s (in un intervallo) con s maggiore di $1/2$. Laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet in dimensione qualunque come operatore non limitato. 137
- Lezione 70.** Regolarità delle autofunzioni del Laplaciano in dimensione qualunque. Ortogonalità dei gradienti delle autofunzioni. In un quadrato (del piano) le tracce di funzioni H^1 sono tutte e sole le funzioni che stanno in $H^{1/2}$ della sezione. Enunciato del teorema spettrale per operatori non limitati. 143

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 47

Note Title

21/11/2019

OPERATORI COMPATTI

Def. Siano X e Y sp. normati, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Si dice che f è un operatore compatto se manda limitati in relativamente compatti.

In termini di successioni:

$\{x_n\} \subseteq X$ limitata $\Rightarrow \{f(x_n)\} \subseteq Y$ ammette s. succ. conv.

Oss. Si può definire con X e Y metrici.

Oss. Un operatore cpt. non è obbligato ad essere continuo (ad esempio se l'immagine sono due punti).

Prop. 1 (Lineare + cpt. $\Rightarrow$ continuo ss)

Siano X e Y normati e $f: X \rightarrow Y$. Supponiamo

(i) f lineare

(ii) f compatto.

Allora f è continuo strong-strong, cioè

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ in } X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_\infty) \text{ in } Y.$$

Dim. Per linearità suppongo wlog $x_\infty = 0$.

Sia $x_n \rightarrow 0$. Supponiamo per iniziazione che $x_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\frac{x_n}{\|x_n\|_X}$ è una succ. limitata, quindi

$f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right)$ è rel. cpt. in Y , dunque limitata in Y , cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underbrace{\frac{1}{\|x_n\|_X} \|f(x_n)\|_Y}_{\text{norma di } f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right)} \leq M$$

A questo p.to $\|f(x_n)\|_Y \leq M \|x_n\|_X$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Nel caso generale, considero la s.succ. di quelli che sono $\neq 0$ e su quelli ottengo

$$\|f(x_n)\|_Y \leq M \|x_n\|_X \quad \forall n \in \text{s.succ.}$$

ma la stessa stima vale banalmente anche per gli x_n nulli.
Finale come sopra.

— 0 — 0 —

Def. (Operatore simmetrico) Sia H uno sp. di Hilbert
Un operatore $f: H \rightarrow H$ si dice simmetrico se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall (v, w) \in H^2$$

Moralmente: f inverte i prodotti scalari

Esercizio Se $f: H \rightarrow H$ è simmetrico, allora è lineare

Verifica con la somma:

$$\begin{aligned} \langle f(v_1 + v_2), w \rangle &= \langle v_1 + v_2, f(w) \rangle = \langle v_1, f(w) \rangle + \langle v_2, f(w) \rangle \\ &= \langle f(v_1), w \rangle + \langle f(v_2), w \rangle \\ &= \langle f(v_1) + f(v_2), w \rangle \end{aligned}$$

Questo dice che

$$\langle f(v_1 + v_2) - f(v_1) - f(v_2), w \rangle = 0 \quad \forall w \in H$$

L'unico vettore $\perp$ a tutto è quello nullo.

— 0 — 0 —

Prop. 2 (Lineare + cpt. + simm $\Rightarrow$ continuo WS)

Sia H Hilbert e sia $f: H \rightarrow H$. Supponiamo

(i) f lineare

(ii) f compatto

(iii) f simmetrico

un giorno seguirà
dalla conv. debole
↑

Allora f è continuo weak-strong, cioè (se $\{x_n\}$ è limitata)

$x_n \rightarrow x_\infty$ debde in $H \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$ forte in H .

Dim. Ci siamo quasi, perché la compattezza assicura che $\{f(x_n)\}$ ammette s.succ. che conv. forte.

Il problema è che deve convergere tutta.

Per ogni $w \in H$ vale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f(x_n), w \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, f(w) \rangle \\ &\quad \uparrow \text{simul.} \\ &= \langle x_\infty, f(w) \rangle \\ &\quad \uparrow \text{conv. debole} \\ &= \langle f(x_\infty), w \rangle \\ &\quad \uparrow \text{simul.} \end{aligned}$$

Ora, per il lemma della sotto-sotto, ci basta dimostrare che ogni $\{f(x_{n_k})\}$ ha una sotto-sotto

$$f(x_{n_{k_i}}) \rightarrow f(x_\infty) \quad (\text{sempre lui})$$

Data $\{f(x_{n_k})\}$ per compattezza questa ha

$$f(x_{n_{k_i}}) \rightarrow y_\infty$$

Dalla relazione precedente segue che $\langle y_\infty, w \rangle = \langle f(x_\infty), w \rangle$
per ogni $w \in H$ e quindi $y_\infty = f(x_\infty)$.

QUOZIENTE DI RAYLEIGH

Def. Sia H uno sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$.

Poniamo

$$q(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$$

quoziente di Rayleigh

Teorema (Caratterizzazione variazionale degli autovalori)

Sia H Hilbert, sia $A: H \rightarrow H$ lineare + compatto + simm.

Sia $V \subseteq H$ un s.sp. vettoriale $V \neq \{0\}$ che sia A -invariante, cioè $Av \in V$ per ogni $v \in V$. è chiuso

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) Esiste

$$\lambda_0 := \max \{ |q(v)| : v \in V \setminus \{0\} \}$$

e si può caratterizzare come

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \max \{ |\langle Av, v \rangle| : v \in V, \|v\| = 1 \} \\ &= \max \{ \quad \quad \quad \|v\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

(2) Se $v_0 \in V$ soddisfa $|q(v_0)| = \lambda_0$ (cioè è un p.to di max) allora

$$Av_0 = \underbrace{q(v_0)}_{\pm \lambda_0} v_0$$

cioè $q(v_0)$ è autovalore e v_0 è corrispondente autovettore.

Oss. Non stiamo dicendo che $q(v)$ ammette max/min (uno dei 2 può non averlo, ma $|q(v)|$ ha max).

Dim. Ci sono tantissimi vicioli ciechi.

Step 1 $q(v)$ è 0-omogeneo, quindi costante sulle rette che escono dall'origine, quindi

$$\sup \{ |q(v)| : v \in V \setminus \{0\} \} = \sup \{ |q(v)| : v \in V \text{ e } \|v\| = 1 \}$$

$$= \sup \{ |\langle Av, v \rangle| : v \in V, \|v\| = 1 \}$$

$$\leq \sup \{ |\langle Av, v \rangle| : v \in V, \|v\| \leq 1 \}.$$

↑ sup su + roba

Step 2 L'ultima è una uguaglianza. Infatti, se $\|v_0\| < 1$, allora

$$w_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$$

soddisfa

$$|\langle Aw_0, w_0 \rangle| = \frac{1}{\|v_0\|^2} |\langle Av_0, v_0 \rangle| > |\langle Av_0, v_0 \rangle|$$

e inoltre $\|w_0\| = 1$, quindi è un competitor migliore.
(Disattiva il caso $\|v_0\| = 0$)

Step 3 L'ultimo sup è un max ed i pti di max hanno norma 1 (tranne nel caso banale in cui $q(v) \equiv 0$ in V)

Sia $\{v_n\}$ una successione suppiante. È limitata, quindi ammette s.succ. (che non risolviamo) che conv. debolmente

$$v_n \rightharpoonup v_\infty$$

Allora

- $\|v_\infty\| \leq 1$ (sci della norma)
- $v_\infty \in V$ (chiuso forte + convesso $\Rightarrow$ chiuso debole)

Claim $\langle Av_n, v_n \rangle \rightarrow \langle Av_\infty, v_\infty \rangle$

Infatti $Av_n \rightarrow Av_\infty$ (per continuità ws) e una forte + una debole permettono di passare al limite nel prod. scalare.

Questo dim. che esiste max. Per lo step 2 i pti di max stanno sul bordo.

Step 4 Cosa risolve un pto di max v_0 ?

Sappiamo che v_0 è pto di max o min per $q(v)$ senza valore assoluto

Per ogni $v \in V$ considero

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= q(v_0 + tv) = \frac{\langle A(v_0 + tv), v_0 + tv \rangle}{\|v_0 + tv\|^2} \\ &= \frac{\langle Av_0, v_0 \rangle + 2t \langle Av_0, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle}{\|v_0\|^2 + 2t \langle v_0, v \rangle + t^2 \|v\|^2} \end{aligned}$$

simul. $\nearrow$

$$0 = \varphi'(0) = \frac{2 \langle Av_0, v \rangle \|v_0\|^2 - 2 \langle v_0, v \rangle \langle Av_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^4}$$

cioè

$$\langle Av_0, v \rangle \|v_0\|^2 - \langle Av_0, v_0 \rangle \langle v_0, v \rangle = 0$$

$$\left\langle Av_0 - \frac{\langle Av_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$\in V$ perchè V è A -invariante

Quindi

$$Av_0 - \underbrace{\frac{\langle Av_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2}}_{q(v_0)} v_0 = 0$$

— 0 — 0 —

Ist. Analisi Matematica

- LEZIONE 48

Note Title

21/11/2019

TEOREMA SPETTRALE

Sia H uno sp. di Hilbert e sia
 $A: H \rightarrow H$.

Supponiamo che

(i) H sia separabile (e di dim infinita)

(ii) A sia lineare + cpt. + simmetrico.

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) Esiste una base ortonormale di H (numerabile)
 costituita da autovettori di A .

(2) Gli autovalori non nulli sono o un numero finito
 o una successione $\{\lambda_n\}$ con $\lambda_n \rightarrow 0$

(2 bis) L'insieme degli autovalori (lo SPETTRO di A)
 è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ e ha 0 come
 unico possibile p.to di accumulazione)

(3) Tutti gli autospazi (tranne eventualmente il ker)
 hanno DIMENSIONE FINITA.

Dcm. **Step 1** Ripasso di geometria 1

- Autovettori con autovalori diversi sono ortogonali

Siano $Av = \lambda v$ e $Aw = \mu w$. Allora

$$\begin{aligned}\lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \\ &= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle &= 0 \\ \neq 0\end{aligned}$$

- Se V è s.sp. A -invariante, allora $V^\perp$ è pure ssp. A -inv. (e chiuso)
 $\uparrow$ ortogonale

Dato $w \in V^\perp$ e $v \in V$, vale

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, \underbrace{Av}_V \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Aw \in V^\perp$$

Step 2 L'idea è di definire inolttrivamente una successione di sottosp. A -invarianti

$$H = V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$$

e poi applicare il quoziente di Rayleigh su ciascuno. Si ottiene una succ. di vettori $v_1, v_2, \dots$ di norma 1 t.c.

$$Av_i = q(v_i) v_i \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Automaticamente avremo anche che

$$|q(v_1)| \geq |q(v_2)| \geq \dots$$

(sono max su spazi sempre + piccoli)

Costruzione:

- Prendo $V_1 := H$. Se $q(v) \not\equiv 0$ in V_1 trovo v_1
- Pongo

$$V_2 := \{v \in H : \langle v, v_1 \rangle = 0\}$$

e osservo che è chiuso e A -invariante, in quanto è l'ortogonale di $\text{Span}(v_1)$

Se $q(v) \not\equiv 0$ in V_2 trovo v_2

- Supponendo di aver definito $V_1, \dots, V_k$, poniamo

$$V_{k+1} := \{v \in H : \langle v, v_1 \rangle = \dots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$$

e osserviamo che va bene.

Abbiamo 2 casi

- ① Strada facendo (magari pure subito) accade che $q(v) \equiv 0$ su qualche V_k
- ② È sempre non nullo e la costruzione prosegue all'infinito.

Step 3 Sistemiamo il 1° caso. Sia k il primo indice per cui $q(v) \equiv 0$ su V_k .
Claim: $V_k = \ker(A)$

Ipotesi: $\langle Av, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

Tesi: $Av = 0 \quad \forall v \in V$

(qui deve servire la simmetria: pensare a rotazione di 90° in $\mathbb{R}^2$)

Per ogni $v \in V$ e $w \in V$ vale

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A(v+w), v+w \rangle = \underbrace{\langle Av, v \rangle}_{\text{stim.}} + \underbrace{\langle Aw, w \rangle}_{0} + 2 \underbrace{\langle Av, w \rangle}_{0} \\ &= 2 \langle Av, w \rangle \end{aligned}$$

Quindi $\langle Av, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V$, quindi $Av = 0$.

Conclusione: abbiamo già ottenuto $v_1, \dots, v_{k-1}$ autovettori e li completiamo aggiungendo una base ortogonale del $\ker$.

Perché esiste? Perché $\ker$ è un Hilbert separabile

(Un chiuso in un metrico separabile è a sua volta separabile, ma in un topologico in generale è falso)

(nei metrici si basa sul fatto che separabile $\Leftrightarrow$ base numerabile di intorno)

Step 4 Se la costruzione va avanti all'infinito, quindi trovo $u_1, u_2, \dots$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |q(u_n)| = 0$$

Infatti, se così non fosse, essendo $|q(u_n)|$ debolm. dec., avremmo che

$$|q(u_n)| \geq \lambda_\infty > 0$$

Ma allora

$$\|A u_n - A u_m\|^2 = \|q(u_n) u_n - q(u_m) u_m\|^2$$

$$\begin{aligned} &= |q(u_n)|^2 \|u_n\|^2 + |q(u_m)|^2 \|u_m\|^2 \\ &\quad \text{sono} \quad \nearrow \quad \underbrace{\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_1 \\ &\quad \text{ortogonali} \\ &\geq 2\lambda_\infty^2 \end{aligned}$$

cioè $\{A u_n\}$ NON ha sottosucc. di Cauchy, il che è un guaio per la compattezza dell'operatore.

Step 5 Concludiamo nel caso 2.

Poniamo

$$V_\infty := \{v \in H : \langle v, u_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$$

Claim: V_∞ è il ker !!

$$= \text{Span}(u_1, u_2, \dots)^\perp$$

Basta osservare che

$$\sup \{ |q(v)| : v \in V_\infty \} \leq \sup \{ |q(v_i)| : v_i \in V_i \} = |q(u_i)| \rightarrow 0$$

Quindi $q(v) \equiv 0$ su $V_\infty \Rightarrow V_\infty = \ker$

Prendendo una base ortonormale di V_∞ e aggiungendola ai vettori già trovati abbiamo finito.

— 0 — 0 —

Esempio (Sarebbe che l'operatore sia op.)

$$H = L^2((0,1)) \quad [Af](x) = x f(x) \quad \forall f \in H$$

- È lineare e ben definito: $f \in L^2((0,1)) \Rightarrow Af \in L^2((0,1))$
- È 1-lipschiteiano

$$\|Af\|_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 f(x)^2 dx = \|f\|_{L^2}^2$$

- È simmetrico:

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_0^1 x f(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot x g(x) dx \\ &= \langle f, Ag \rangle \end{aligned}$$

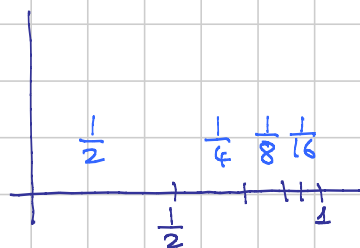
- Non ha autovalori! Se fosse $Af = \lambda f$ sarebbe

$$x f(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

Il che non può essere se $f(x) \neq 0$ in un insieme di misura positiva.

- A non è compatto.
 - se lo fosse, avrebbe autovalori 😊
 - Con le mani, cerchiamo $\{f_n\}$ limitata tale che $\{Af_n\}$ non ha s.succ. di Cauchy.

Chiamiamo I_k gli intervalli
in figura con
 $|I_k| = \frac{1}{2^k}$



Poniamo

$$f_k(x) = \begin{cases} (\sqrt{2})^k & x \in I_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservo che $\|f_k\|_{L^2} \equiv 1$ per ogni k e hanno supporto disgiunto, quindi

$$\|A f_m - A f_m\| = \int_{I_m} x^2 2^m + \int_{I_m} x^2 \cdot 2^m \geq \text{cost} > 0.$$

sono ben lontani da 0

— 0 — 0 —

Ist. di Analisi Matematica

—

LEZIONE 49

Note Title

25/11/2019

APPROSSIMAZIONE DI OPERATORI COMPATTIProp (Limite unif. sui limitati di op. cpt. è op. cpt.)Siano X e Y sp. normati (o anche solo metici).Siano $f_m: X \rightarrow Y$ e $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) Y è completo(ii) f_m è op. cpt. per ogni $m \in \mathbb{N}$ (iii) $f_m \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati di X .Allora f_∞ è op. cpt.Dim. Dato $B \subseteq X$ limitato, serve $f_\infty(B)$ rel. cpt.Essendo Y completo, basta $f_\infty(B)$ sia tot. limitato[Idea: $f_\infty(B)$ è vicino a $f_m(B)$, il quale è tot. limitato]

Traduzione formale.

• Ci viene dato $\varepsilon > 0$ • Scegliamo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. (possiamo per Hp (iii))

$$\text{dist}_Y(f_\infty(x), f_{m_0}(x)) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall x \in B$$

• Visto m_0 , esistono $y_1, \dots, y_k \in Y$ tali che

$$f_{m_0}(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

• Claim: $f_\infty(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$

Per ogni $x \in B$ si ha che $f_\infty(x)$ dista meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ da $f_{m_0}(x)$,
 il quale dista meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ da uno degli y_i .

— o — o —

Esercizio Mostrare che Y completo serve davvero.

Approx. finito dimensionale in sp. di Hilbert

- Setting:
- H sp. di Hilbert SEPARABILE
 - $\{e_n\}$ base ortonormale
 - $H_n := \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$ (primi n vettori)
 - $P_n : H \rightarrow H_n$ proiezione ortogonale

Dato X sp. normato e data $f : X \rightarrow H$ definiamo $f_n : X \rightarrow H_n$ ponendo

$$f_n(x) := P_n(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

- ① Se f è lineare, allora f_n è lineare (P_n è lineare)
- ② Se f è continua, allora f_n è continua (P_n è continua)
- ③ Se f è op. cpt., allora f_n è op. cpt.
(Se $B \subseteq X$ limitato $\Rightarrow f(B) \subseteq K$ cpt. in H e $P_n(K)$ è cpt sia in H_n sia in H)
- ④ L'immagine di f_n è contenuta in s.sp. di dim. finita
- ⑤ $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ per ogni $x \in X$ (conv. puntuale)
- ⑥ Se f è op. cpt., allora $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati di X

Dati $B \subseteq X$ limitato ed $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\|f(x) - f_n(x)\|_H \leq \varepsilon \quad \forall x \in B \quad \forall n \geq m_0$$

Essendo f compatto, esistono $y_1, \dots, y_k \in H$ t.c.

$$f(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

Per ogni $i = 1, \dots, k$ esiste $z_i \in \text{Span}(\{e_n\})$ t.c. $\|z_i - y_i\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$
 $\uparrow$ comb. lin. finite

Osserviamo che $B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \subseteq B(z_i, \varepsilon)$ e quindi

$$f(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(z_i, \varepsilon).$$

Per n grande ($n \geq n_0$) accade che $z_i \in H_n$ per ogni $i=1, \dots, k$.
 Dico che la relazione richiesta vale per ogni $n \geq n_0$.

Dato $x \in B$ esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ t.c.

$$f(x) \in B(z_i, \varepsilon)$$

e quindi

$$\|f(x) - f_n(x)\|_H = \|f(x) - P_n(f(x))\|_H$$

$$\leq \|f(x) - z_i\|_H \leq \varepsilon$$

↑ La proiezione minimizza la dist. da H_n
 e $z_i \in H_n$ è un competitor.

— o — o —

Corollario Dati X sp. normato, H sp. Hilbert separabile, $f: X \rightarrow H$
 valgono enunciati del tipo

" f è <Ipotesi su f > se e solo se è approssimabile unif.
 sui limitati mediante succ. f_n che verifica <Ipotesi su f_n >
 e ha immagine contenuta in s.sp. di H di dimensione finita"
 in 3 casi

① H_p su f : op. cpt.

H_p su f_n : op. cpt.

② H_p su f : op. cpt. + lin.

H_p su f_n : op. lin. + cpt.

③ H_p su f : op. cpt. + cont

H_p su f_n : op. cont. (e quindi
 anche compatto visto che
 l'immagine è finito dimensionale)

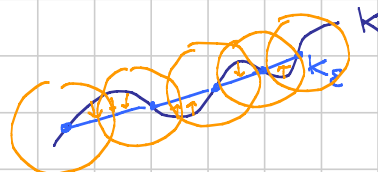
— o — o —

Approx. finito dim. in sp. normati completi

Lemma (Proiezione non lineare) non serve davvero

Sia Y sp. normato completo, e sia $K \subseteq Y$ un compatto, e sia $\varepsilon > 0$. Allora esistono $K_\varepsilon \subseteq Y$ e $P_\varepsilon: K \rightarrow K_\varepsilon$ tali che

- (i) K_ε è involucro convesso di numero finito di punti di K
- (ii) $\|P_\varepsilon y - y\| \leq \varepsilon$ per ogni $y \in K$
- (iii) P_ε è continua.

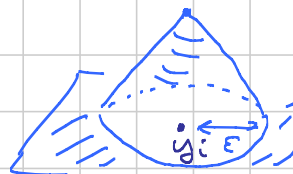


Dim Essendo K compatto, esistono $y_1, \dots, y_k \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperte}}}{B(y_i, \varepsilon)} =: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperto}}}{A_\varepsilon}$$

Per ogni $i = 1, \dots, k$ definiamo $c_i: Y \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$c_i(y) := \max \{ 0, \varepsilon - \|y - y_i\| \} \quad \text{"conetto"}$$



Poniamo $S(y) := \sum_{i=1}^k c_i(y)$ (positiva in A_ε)

e infine definiamo $P_\varepsilon: A_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$
 come $\uparrow$ in particolare è definita in K

$$P_\varepsilon(y) := \sum_{i=1}^k \boxed{\frac{c_i(y)}{S(y)}} y_i$$

$\nwarrow$ coeff. in $[0, 1]$ a somma 1

dove $K_\varepsilon :=$ involucro convesso degli y_i

$$= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Le richieste (i) e (iii) sono immediate dalle definizioni

Controlliamo la (ii)

$$\begin{aligned}
 \|P_\varepsilon(y) - y\|_Y &= \left\| \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} y_i - \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} y \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} (y_i - y) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} \underbrace{\|y_i - y\|}_{\leq \varepsilon \text{ se il coeff. è diverso da } 0} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} \varepsilon = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Vale un corollario quasi analogo al caso Hilbertiano.

① Un operatore $f: X \rightarrow Y$ è compatto se e solo se è
↑ ↑
normato normato

Di suite unif. sui cpt. di una successione di op. cpt.

$f_n: X \rightarrow Y$ la cui immagine è contenuta in s.sp. $Y_n \subseteq Y$ di dimensione finita.

② Stessa cosa con f compatto + continuo e f_n continui
 (e quindi automaticamente compatti)

Achtung! Non vale la versione con cpt. + lineare
 (ci sono controesempi strani)

Dim ① Data $f: X \rightarrow Y$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$B_n := B_X(0, 2n)$. Consideriamo $f(B_n) \subseteq \hat{K}_n \subseteq Y$
↑
compatto

Applichiamo il lemma di proiezione non lineare a $\hat{K}_n$ con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Troviamo

$$P_n: \hat{K}_n \rightarrow K_n$$

↑
 inviluppo convesso di numero finito
 di p.ti di $\hat{K}_n$, e quindi contenuto
 in s.sp. $Y_n \subseteq Y$ di dim. finita

Consideriamo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come in figura.

Potiamo infine

$$f_n(x) := P_n \left(f \left(\underbrace{\varphi\left(\frac{\|x\|}{n}\right)}_{\in B_x(0, 2n)} x \right) \right)$$



e osserviamo che $f_n(x) \in K_n$ per ogni $x \in X$.

Dobbiamo verificare conv. unip. $f_n \rightarrow f$ sui limitati di X .

Dato $B \subseteq X$ limitato, per n grande vale $B \subseteq B_x(0, n)$ e quindi

$$\varphi\left(\frac{\|x\|}{n}\right)x = x \quad \forall x \in B$$

e quindi

$$\|f(x) - f_n(x)\|_Y = \|f(x) - P_n(f(x))\|_Y \leq \frac{1}{n}$$

da cui la tesi.

Dim ② Basta osservare che f_n è continua se f è continua.

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 50

Note Title

25/11/2019

TEOREMA DI BROUWER Sia $d \geq 1$ intero ed $R > 0$. Sia

$$f: \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$$

una funzione continua.

Allora f ammette ALMENO un p.to fisso ($f(x) = x$).

Dim.: vedi corsi di geometria. ☺

Teorema di Brouwer modificato Sia $d \geq 1$ intero, sia $D \subseteq \mathbb{R}^d$
compatto e convesso

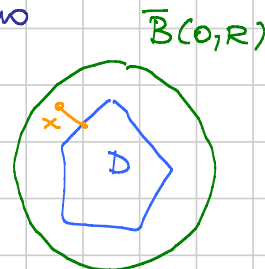
e sia $f: D \rightarrow D$ continua.

Allora f ammette almeno un p.to fisso.

Dim. Sia $R > 0$ t.c. $D \subseteq \bar{B}(0, R)$. Definiamo

$$\hat{f}: \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$$

ponendo $\hat{f}(x) := f(P_D(x))$
 $\uparrow$
 proiezione su
 convesso chiuso



Essendo $\hat{f}$ continua, per Brouwer classico esiste $\hat{x} \in \bar{B}(0, R)$ tale che

$$\hat{x} = \hat{f}(\hat{x}) \in D$$

e quindi $\hat{x} \in D$. Concludiamo osservando che $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$, dunque in particolare per $\hat{x}$.

— o — o —

Esiste un analogo di Brouwer in dimensione infinita?

Brutta notizia Anche in un Hilbert separabile di dim infinita esiste

$$f: \overline{B}(0,1) \rightarrow \overline{B}(0,1)$$

continua senza p.ti fissi.

Esempio classico $x \in H$ e $(x_1, x_2, \dots)$ siano le componenti di x rispetto a base ortonormale $\{e_n\}$.

Poniamo

$$f(x) = \left(\{1 - \|x\|^2\}^{1/2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots}_{\text{componenti di } x \text{ shiftate di posto}} \right) \quad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

Verifichiamo che $f(x) \in \overline{B}(0,1)$. Infatti

$$\|f(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}_{\|x\|^2} = 1$$

Quindi f mappa $\overline{B}(0,1)$ nel bordo.

La continuità è un facile esercizio.

Verifichiamo l'assenza di punti fissi. Se $f(x) = x$, allora

$x_1 = x_2 = x_3 = \dots$, ma allora $x = 0$, ma $f(0) = (1, 0, 0, \dots)$ e quindi non può essere fisso.

— 0 — 0 —

Buona notizia: **Teorema di SCHAUDER**

Siano $K \subseteq C \subseteq Y$ e sia $f: C \rightarrow K$ continua

$\uparrow$ compatto $\uparrow$ convesso $\uparrow$ sp. normato

Allora f ammette almeno un p.to fisso.

Dim

Idea: approx f con approssimanti finito dimensionali su cui vale Brouwer classico e passo al limite.

I dettagli sono delicati (vicoli ciechi).

Per ogni intero $n \geq 1$ applichiamo il lemma di proiezione non lineare a K con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Troviamo

$P_n : K \rightarrow K_n =$ sviluppo convesso di numero finito di punti di K , dunque contenuto in C e in s.p. $Y_n \subseteq Y$ di dimensione finita.

Ora consideriamo $f_n : K_n \rightarrow K_n$ come

$$f_n(x) := P_n \left(\underbrace{f(x)}_{\in K} \right) \quad \forall x \in K_n$$

$\in C$

Essendo f_n continua ed in dim. finita possiamo applicare Brouwer modificato: esiste $x_n \in K_n$ t.c. $f_n(x_n) = x_n$.

Poniamo $y_n := \underbrace{f(x_n)}_{\text{senza } n} \in K$ e quindi esiste $y_{n_k} \rightarrow y_\infty \in K$

Claim: $x_{n_k} \rightarrow y_\infty$ e vale $f(y_\infty) = y_\infty$.

Verifichiamo primo claim:

$$\|y_\infty - x_{n_k}\|_Y = \|y_\infty - \underbrace{f_{n_k}(x_{n_k})}_{x_{n_k} \text{ p.to fisso}}\|$$

$$\leq \|y_\infty - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})\|$$

$$= \underbrace{\|y_\infty - y_{n_k}\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\| \underbrace{f(x_{n_k})}_{\in K} - P_{n_k}(f(x_{n_k})) \|}_{\leq \frac{1}{n_k}} \leq \frac{1}{n_k}$$

Verifica secondo claim : poiché $x_{n_k} \rightarrow y_\infty$ vale

$$f(y_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_\infty.$$

$\uparrow$
 f continua

— o — o —

Applicazione classica: teo. di sda esistenza per eq. diff.

Analisi 2 : Setting

- $k \geq 1$ intero
- $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^k$
- $\delta_0 > 0$ ed $r > 0$
- $f : [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}(u_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^k$ cont.

$\uparrow$ palla in $\mathbb{R}^k$

Consideriamo il pbm. di Cauchy

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

$$u(t_0) = u_0$$

e cerchiamo una soluzione locale $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Poniamo $M := \max \{ |f(t, u)| : t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0], u \in \bar{B}(u_0, r) \}$
e scegliendo $\delta > 0$ t.c.

$$\delta \leq \delta_0 \quad \text{e} \quad \delta M \leq r$$

otteniamo ALMENO una soluzione definita su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Tre possibili dimostrazioni

- ① Approssimando f mediante funzioni Lip
 - ② Utilizzando pbm. con ritarso alla TONELLI
 - ③ Usando SCHAUDER
- } corso di Analisi 2

Dim ③ Scriviamo l'eq. in forma integrale

$$[\Phi(u)](t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Risolvere pblm. di Cauchy è equivalente a trovare p.to fisso di Φ .
Poniamo

$$Y := \{ \text{funzioni continue } u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k \}$$

↑ sp. normato completo rispetto alla norma del sup

$$C := \{ \text{funzioni continue } u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \overline{B}(u_0, r) \}$$

↑ convesso contenuto in Y (serve palla convessa)

$$K := \{ u \in C : u \text{ è Lip. con costante di Lip. } \leq M \}$$

↑ compatto $\subseteq C$ (Ascoli - Arzelà !!)

Dalle condizioni su δ segue che $\Phi: C \rightarrow C$ (si tratta di verificare che $[\Phi(u)](t) \in \overline{B}(u_0, r)$)

Si verifica che $\Phi(u) \in K$ perché $\|[\Phi(u)]'\| \leq M$.

Da Schauder segue l'esistenza di almeno un p.to fisso.

Serve anche che Φ sia continua, ma questo segue dal passaggio al limite sotto il segno di integrale rispetto alla conv. uniforme (per esercizio sistemare per bene i dettagli)

— o — o —

APPLICAZIONI LINEARI E CONTINUE

Setting: V e W sp. vettoriali normati

Chiamiamo $f: V \rightarrow W$ lineari e continue

Domande: ① Esiste $f: V \rightarrow W$ lineare non banale $f \neq 0$

② " " e continua "

③ " " e NON continua

CA: Choice Axiom (assioma di scelta)

Risposta ① : $CA \Rightarrow$ Zorn $\Rightarrow$ esiste base algebrica di V
(base di Hamel)

A quel punto prendo dove mi pare gli el. della base ed estendo per linearità

Domanda: cosa vuol dire lineare e continuità.

Prop. ($\neq$ sfumature di continuità)

Siano V e W sp. normati e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(i) f è continua per successioni,

(i') f è " " in $v=0$,

(ii) f è continua ε/δ

(ii') f " in $x=0$

(iii) f manda limitati di V in limitati di W

(iii') $f(B_V(0,1))$ è limitato in W

(iv) f è lipschitziana

Dim (i) $\Rightarrow$ (i'), (ii) $\Rightarrow$ (ii'), (iii) $\Rightarrow$ (iii')

Le viceversa seguono dalla linearità, ad esempio supponiamo (iii') e dimostriamo (iii). Dato $B \subseteq V$ limitato, esiste $R > 0$ t.c. $B \subseteq B_V(0, R)$ e quindi

$$f(B) \subseteq f(B_V(0, R)) = R f(B_V(0, 1)) \leftarrow \text{limitato in } W$$

$\uparrow$ f lineare

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): fatto generale in spazi metrici

(iii') $\Rightarrow$ (ii'): dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ t.c.

$$f(B_V(0, \delta)) \subseteq B_W(0, \varepsilon)$$

Supponiamo $f(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, R)$ (ipotesi (iii'))

Allora preso $\delta := \frac{\varepsilon}{R}$ avremo che

$$f(B_V(0, \frac{\varepsilon}{R})) = \frac{\varepsilon}{R} f(B_V(0, 1)) \subseteq \frac{\varepsilon}{R} B_W(0, R) = B_W(0, \varepsilon)$$

(ii') $\Rightarrow$ (iii'): Applico continuità ε/δ con $\varepsilon = 1$. Trovo $\delta > 0$ tale che

$$f(B_V(0, \delta)) \subseteq B_W(0, 1). \text{ Ma allora}$$

$$f(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, \frac{1}{\delta})$$

Fino qui tutte le prime 6 sono equivalenti.

(iv') $\Rightarrow$ resto: ovvio

Ranca: qualcosa $\Rightarrow$ (iv). Usiamo (iii') $\Rightarrow$ (iv)

Supponiamo $f(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, R)$ e deduciamo che

f è $\mathbb{R}$ -lipschitziana.

$$\|f(y) - f(x)\|_W = \|f(y-x)\|_W \leq R \|y-x\|_V$$

Posto $\delta = \|y-x\|_V$ abbiamo che $y-x \in B_V(0, \delta)$ e quindi $f(y-x) \in B_W(0, R\delta)$ e quindi

$$\|f(y-x)\|_W \leq R\delta = R\|y-x\|_V.$$

Risposta ③ Se V è sp. normato di dim. infinita, allora esiste $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e NON continua.

Dim. Dimensione infinita $\Rightarrow$ esiste succ. $\{v_n\}$ di vettori lineari. indip. (facile esercizio)

CA $\Rightarrow$ posso completarli ad una base di Hamel

Pongo (suppongo $\|v_n\|_V = 1$)

$$f(v_n) := n$$

f (altri elem. della base) = 0 (o qualunque cosa)

Questa non soddisfa (iii'), e quindi non è continua

Def (Pseudo-norma) Sia V uno sp. vett.

Una pseudo-norma in V è una funzione

$$p: V \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

(i) (subadditiva)

$$p(v+w) \leq p(v) + p(w) \quad \forall (v, w) \in V^2$$

(ii) (positivamente omogenea)

$$p(\lambda v) = \lambda p(v) \quad \forall v \in V \quad \boxed{\forall \lambda > 0}$$

(Nessuna ipotesi di segno)

TEOREMA (HAHN-BANACH, forma analitica)

Sia V sp. vett., sia $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ pseudonorma, sia $E \subseteq V$ s.sp. vett., sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e tale che

$$f(v) \leq p(v) \quad \forall v \in E.$$

Allora (è possibile estendere f mantenendo la disuguaglianza) esiste $\hat{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\hat{f}$ è lineare e

$$\hat{f}(v) = f(v) \quad \forall v \in E$$

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \quad \forall v \in V.$$

Dim Considero $\mathcal{Y} := \{ (F, \varphi) : E \subseteq F \subseteq V \text{ s.sp. e } \varphi: F \rightarrow \mathbb{R} \text{ è lineare ed estende } f \text{ mantenendo la disug. su } F \}$

Osserviamo che $\mathcal{Y}$ è ordinata parzialmente da

$$(F_1, \varphi_1) \leq (F_2, \varphi_2) \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \text{ e } \varphi_2(v) = \varphi_1(v) \quad \forall v \in F_1$$

Ogni catena di $\mathcal{Y}$ (sottoinsieme totalmente ordinato) ammette maggiorante. Sia $\{(F_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ la catena. Il maggiorante è

$$(F_\infty, \varphi_\infty) \text{ con } F_\infty := \bigcup_{i \in I} F_i \text{ e}$$

$$\varphi_\infty(v) = \varphi_i(v) \text{ se } v \in F_i \quad (\text{verificare che è ben posto})$$

CA $\Rightarrow$ ZORN $\Rightarrow$ esiste in $\mathcal{Y}$ un elemento (F, g) massimale

Claim: $F = V$. Se così non fosse, prendo $v_0 \in V \setminus F$ e provo ad estendere g a $F + \mathbb{R}v_0 = \text{Span}(F, v_0)$

Devo definire $g(v_0)$ e poi potrò pone

$$g(v + \alpha v_0) := g(v) + \alpha g(v_0)$$

L'unica cosa non ovvia è la disug. con la pseudonorma.
Senze

$$g(v + \alpha v_0) \leq p(v + \alpha v_0) \quad \forall v \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ci sono 3 casi

- Se $\alpha = 0$ non è difficile $\ddot{\smile}$
- Se $\alpha > 0$ raccolgo e porto fuori

$$\alpha g\left(v_0 + \frac{v}{\alpha}\right) \leq \alpha p\left(v_0 + \frac{v}{\alpha}\right)$$

$\uparrow$
 generico elemento di F

quindi senze

$$g(v_0 + y) \leq p(v_0 + y) \quad \forall y \in F$$

cioè

$$g(v_0) \leq p(v_0 + y) - g(y) \quad \forall y \in F$$

- Se $\alpha < 0$ poniamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$ e troviamo

$$g(v - \beta v_0) \leq p(v - \beta v_0)$$

Porto fuori β e otteniamo

$$\cancel{p} g\left(\frac{v}{p} - v_0\right) \leq \cancel{p} p\left(\frac{v}{p} - v_0\right)$$

$\uparrow$ generico elemento

cioè

$$g(z - v_0) \leq p(z - v_0)$$

$$g(v_0) \geq g(z) - p(z - v_0) \quad \forall z \in F$$

Mettendo insieme le 2 condizioni

$$g(z) - p(z - v_0) \leq g(v_0) \leq p(v_0 + y) - g(y)$$

per ogni z e y in F . Posso trovare $g(v_0)$ se e solo se

$$g(z) - p(z - v_0) \leq p(v_0 + y) - g(y) \quad \forall (z, y) \in F^2$$

Sarà vera? È equivalente a

$$g(z) + g(y) \stackrel{?}{\leq} p(z - v_0) + p(v_0 + y)$$

e questa segue da

$$g(z) + g(y) = g(z + y) \leq p(z + y)$$

$\uparrow$
vale
in F

$$= p((z - v_0) + (v_0 + y))$$

$$\leq p(z - v_0) + p(v_0 + y).$$

— o — o —

Def. (Funzionale ALLINEATO)

Sia V sp. normato e sia $v_0 \in V$.

Allora esiste $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ continua e lineare t.c.

$$f(v_0) = \|v_0\|$$

$$|f(v)| \leq \|v\|_V \quad (\text{quindi } f \text{ è } 1\text{-Lip.})$$

Dim Poniamo $E := \text{Span}(v_0)$ e definiamo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\alpha v_0) = \alpha \|v_0\|$$

Si verifica che è lineare e $f(v) \leq \|v\|_V$ per ogni $v \in E$
 $\uparrow$ pseudo-norma

Hahn-Banach fa il lavoro sporco.
 — o — o —

Corollario Esiste $f: V \rightarrow W$ lineare, continua, $\neq 0$
 $\uparrow$ sp. normati $\uparrow$

Dim

$$V \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{funzionale} \\ \text{allineato}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{funzionale che esiste } \neq 0.}} W$$

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 52

Note Title

26/11/2019

Oss. Se $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e

$$f(v) \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

allora

$$|f(v)| \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Dim Se $f(v) \geq 0$ è ovvio. Se $f(v) < 0$, allora

$$|f(v)| = -f(v) = f(-v) \leq \|-v\|_V = \|v\|_V.$$

— o — o —

Oss. Se H è spazio di Hilbert e $v_0 \in H \setminus \{0\}$, allora UN (ma un giorno sarà IL) funzionale allineato è

$$f(v) = \frac{1}{\|v_0\|} \langle v, v_0 \rangle \quad \forall v \in H$$

Infatti $f(v_0) = \|v_0\|$ e $|f(v)| \leq \frac{1}{\|v_0\|} \|v\| \cdot \cancel{\|v_0\|} = \|v\|$

— o — o —

↑
C.S.

Esempio (Non unicità del funzionale allineato)

Sia $V = \mathbb{R}^2$ con la norma

$$\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$$

Considero $v_0 := (1, 0)$ e dico che ha almeno due funz. allineati

$$\varphi_1(x, y) = x$$

$$\varphi_2(x, y) = x + y$$

$$\text{Ovvio: } \varphi_1(1, 0) = \varphi_2(1, 0) = 1 = \|(1, 0)\|_1$$

Devo verificare che sono 1-lip.

$$|\varphi_1(x, y)| = |x| \leq \|(x, y)\|_1$$

$$|\varphi_2(x, y)| = |x+y| \leq \|(x, y)\|_1 \quad \text{😊}$$

Come sono fatti TUTTI i funzionali allineati di $(1,0)$?

Saranno del tipo $f(x, y) = ax + by$ (geometria 1)

• $f(1,0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$

• chi è la costante di Lip di $f(x, y)$? Dico che è $\max\{|a|, |b|\}$

$$|f(x, y)| = |ax + by| \leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y|$$

$$\leq \max\{|a|, |b|\} (|x| + |y|)$$

$$= \max\{|a|, |b|\} \cdot \|(x, y)\|_1$$

Questo dice che $\text{cost. Lip} \leq \max\{|a|, |b|\}$.

Per la disug. opposta, supponiamo WLOG $\max = |b|$.

Allora usando $(x, y) = (0, \text{sign } b)$ otteniamo

$$f(x, y) = b \cdot \text{sign } b = |b| \quad \text{e} \quad \|(x, y)\|_1 = 1$$

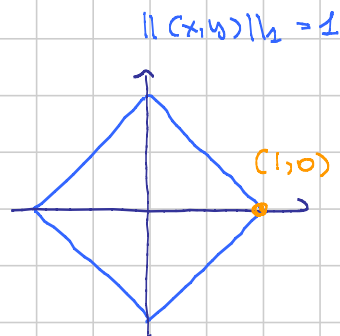
I funzionali allineati verificano

$$a = 1 \quad \text{e} \quad \max\{|a|, |b|\} = 1$$

quindi sono tutti e soli quelli del tipo
 $f(x, y) = x + by$ con $|b| \leq 1$.

Oss. La causa della non unicità è il fatto che la palla ha un angolo nel p.to in questione.

(provare a vedere che succede in $(1, 1)$)



SPAZI DI OPERATORI LINEARI E CONTINUI

Def. Siano V e W sp. vett. normati.

Si indica con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme di tutte le applic. lineari e continue $f: V \rightarrow W$.

Per ogni f di questo tipo poniamo

$$\|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup \{ \|f(v)\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1 \}$$

Prop. Setting come nella definizione.

Valgono i seguenti fatti.

- (1) $\mathcal{L}(V, W)$ è uno sp. vettoriale
- (2) $\|f\|_{\mathcal{L}(V, W)}$ è una norma in tale spazio
- (3) La norma è la costante di Lipschitz
- (4) Se W è completo (Banach), allora $\mathcal{L}(V, W)$ è completo (quindi Banach)
- (5) Vale la stima

$$\|f(v)\|_W \leq \|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Dim (1) e (2) sono semplici verifiche

(3) e (5) sono la stessa cosa e seguono dalla linearità come nelle 7 sfumature

Resta da dimostrare (4). Sca $\{f_n\}$ una succ. di Cauchy in $\mathcal{L}(V, W)$. Dimostriamo Intanto che ha limite puntuale.

Fissato $v \in V$ vale

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_W = \|(f_n - f_m)(v)\|_W \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|v\|_V$$

Quindi $\{f_n(v)\}$ è di Cauchy in W , quindi ha un limite che chiamo $f_\infty(v)$.

- È lineare $\leadsto$ quasi ovvio
- è continuo $\leadsto$ segue dal fatto generale che il limite puntuale di funzioni equi-Lip è Lip.
- Resta da dim. che il limite $f_n \rightarrow f_\infty$ è nella norma di $\mathcal{L}(X, Y)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $v \in V$ con $\|v\| \leq 1$.

Allora per $n, m \geq n_0$ vale

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_W \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \underbrace{\|v\|_V}_{\leq 1} \leq \varepsilon$$

Ora ε non dipende da v se $\|v\|_V \leq 1$. Mandando $m \rightarrow +\infty$ e si ottiene

$$\|f_n(v) - f_\infty(v)\|_W \leq \varepsilon \quad \forall v \in V \text{ con } \|v\|_V \leq 1$$

Faccendo il sup in v vale $\|f_n - f_\infty\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Def. (Duale topologico)

Dato V sp. vett. normato, si definisce duale topologico lo spazio V' di tutte le $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e continue.

Oss. Lo spazio V' è un Banach anche se V non era completo (qui serve che $\mathbb{R}$ è completo)

La norma in V' è definita come

$$\|f\|_{V'} := \sup \{ |f(v)| : v \in V, \|v\|_V \leq 1 \}$$

Prop. (Caratterizzazione duale della norma)

Sia V sp. vett. normato, e sia $v_0 \in V$.

Allora

$$\begin{aligned} \|v_0\|_V &= \sup \{ |f(v_0)| : f \in V', \|f\|_{V'} \leq 1 \} \\ &= \max \{ \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$

Dim. $\boxed{\geq}$ $|f(v_0)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|v_0\|_V \leq \|v_0\|_V$
 ≤ 1

$\boxed{\leq}$ Funzionale allineato !!

— o — o —

Esercizio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ insieme limitato, misurabile

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. Allora vale

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 norma di $\mathbb{R}^k$

Se $f = (f_1, \dots, f_k)$, allora $\int_{\Omega} f = \left(\int_{\Omega} f_1, \dots, \int_{\Omega} f_k \right)$

Vale con una qualunque norma?

Sì! Dimostrazione per dualità. Osserviamo che per ogni

$$L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

lineare e continuo vale

$$L\left(\int_{\Omega} f(x) dx\right) = \int_{\Omega} L(f(x)) dx \quad (\text{linearità dell'integrale})$$

Se $\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})} \leq 1$, allora

analisi 1

$$\left| L\left(\int_{\Omega} f(x) dx\right) \right| \leq \int_{\Omega} |L f(x)| dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \underbrace{\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})}}_{\leq 1} \cdot \|f(x)\|_{\mathbb{R}^k} dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^k} dx$$

Per concludere basta osservare che $\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\|$ è

uguale al sup del LHS al variare di L con $\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})} \leq 1$.

— 0 — 0 —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 53

Note Title

28/11/2019

CONVERGENZA DEBOLE E DEBOLE *

Def. Sia V sp. normato e V' il suo duale topologico (che è sempre Banach, anche se V non lo è).

(1) Se $\{v_m\} \subseteq V$ una succ. e $v_\infty \in V$, si dice che

$$v_m \rightarrow v_\infty \quad (\text{conv. deb. in } V)$$

se

$$f(v_m) \rightarrow f(v_\infty) \quad \forall f \in V'$$

(2) Sia $\{f_m\} \subseteq V'$ una succ. e $f_\infty \in V'$. Si dice che

$$f_m \xrightarrow{*} f_\infty \quad (\text{conv. debole } * \text{ in } V')$$

se

$$f_m(v) \rightarrow f_\infty(v) \quad \forall v \in V$$

conv. puntuale dell'Analisi 2

Oss. Questa nozione di conv. debole coincide con la precedente negli Hilbert quando dimostreremo che il duale di un Hilbert sono le funzioni che si rappresentano con il prod. scalare.

Proprietà semplici (di conv. debole e debole *)

(1) Unicità del limite

(2) Linearità

(3) Forte $\Rightarrow$ debole

(4) Passaggio a s.succ. ($v_m \rightarrow v_\infty \Rightarrow v_{m_k} \rightarrow v_\infty$)
(idem per debole *)

Dim. unicità Supp. $u_m \rightarrow u_\infty$ e $u_m \rightarrow \hat{u}_\infty$. Allora

$$f(u_\infty - \hat{u}_\infty) = f(u_\infty) - f(\hat{u}_\infty) = 0 \quad (\text{ciascuno è limite di } f(u_m))$$

per ogni $f \in V'$. Serve che per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$ esista $f \in V'$ t.c. $f(v) \neq 0 \rightsquigarrow$ uso funzionale allineato
(quindi HB, quindi CA).

Domanda: vale un lemma della sotto-sotto?

Teorema (SCI della norma)

Sia V sp. normato e V' duale.

(1) Se $u_m \rightarrow u_\infty$ in V , allora

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|u_m\|_V \geq \|u_\infty\|_V$$

(2) Se $f_m \xrightarrow{*} f_\infty$ in V' , allora

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|f_m\|_{V'} \geq \|f_\infty\|_{V'}.$$

Dim. (1) Sia $f \in V'$ con $\|f\|_{V'} \leq 1$. Allora

$$|f(u_m)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u_m\|_V \leq \|u_m\|_V.$$

Passo al $\liminf$:

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|u_m\|_V \geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} |f(u_m)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |f(u_m)| = |f(u_\infty)|$$

Ora basta fare il sup del RHS, o più brevemente usare $f =$ funzionale allineato di u_∞ .

(2) Sia $v \in V$ con $\|v\|_V \leq 1$. Allora

$$|f_n(v)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|v\|_V \leq \|f_n\|_{V'}.$$

Come prima:

$$\liminf \|f_n\|_{V'} \geq \lim |f_n(v)| = |f_\infty(v)|$$

Ora faccio davvero il sup.

— o — o —

Oss. Stessa dim. in linguaggio + astratto.

(1) La funzione $v \rightarrow \|v\|_V$ è il sup (anzi il max) di funzioni lineari, dunque debolmente continue, dunque debolmente SCI. Fatto generale: sup di SCI è SCI.

— o — o —

Teorema (Compattezza debole * delle palle)

Sia V sp. normato e sia V' il duale.

Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ una successione.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ limitata in V'

(ii) V sia separabile.

Allora esiste s.succ. che converge debole *, cioè esiste m_k succ. cresc. di interi positivi, ed esiste $f_\infty \in V'$, t.c.

$$f_{m_k} \xrightarrow{*} f_\infty.$$

Dim. Sia $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|f_m\|_{V'} \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Step 1 Accontentiammo un denso numerabile $D \subseteq V$.
 Dimostriamo che esiste n_k tale che

$$f_{n_k}(d) \rightarrow \text{qualcosa} =: f_\infty(d) \quad \forall d \in D$$

$\uparrow$ stesso per ogni $d \in D$

Questo ci permette di definire $f_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Fissato $d \in D$ vale che $|f_n(d)| \leq \|f_n\|_{V^*} \cdot \|d\|_V \leq M \|d\|_V$
 quindi $f_n(d)$ ammette s.succ. conv.
 Con procedimento diag. la s.succ. diventa unip. da d .
 (paroline nel video).

Step 2 Mostriamo che per ogni $v \in V$ si ha che

$$f_{n_k}(v) \rightarrow \text{qualcosa} =: f_\infty(v)$$

$\uparrow$ stessa s.succ. che andava bene in D

Idea: mostrare che $\{f_{n_k}(v)\}$ è di Cauchy, usando

$$|f_{n_k}(v) - f_{n_\ell}(v)| \leq |f_{n_k}(v) - f_{n_k}(d)| + \quad (1)$$

$$+ |f_{n_k}(d) - f_{n_\ell}(d)| \quad (2)$$

$$+ |f_{n_\ell}(d) - f_{n_\ell}(v)| \quad (3)$$

Ora (1) e (3) sono piccoli se d è vicino a v , e (2) è piccolo se k e ℓ sono grandi.

Formalmente:

- ci viene dato $\varepsilon > 0$
- scegliamo $d \in D$ t.c. $M \|v - d\|_V \leq \frac{1}{4} \varepsilon$
 $\uparrow$ bound sulle norme

- Visto d, scegliamo $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. ② è $\leq \frac{1}{4}\epsilon$ se $k, n \geq k_0$
- Concludiamo che per $n, k \geq k_0$ vale

$$|f_{n_k}(v) - f_{n_l}(v)| \leq ① + ② + ③ \leq \frac{3}{4}\epsilon$$

Ora abbiamo definito $f_\infty : V \rightarrow \mathbb{R}$

Step 3 Verifichiamo che $f_\infty \in V'$.

- Linearità: Dimite puntuale di lineari è lineare
- Continuità: " " di M l.p. è M l.p.

— o — o —

Esercizio Provare a ripetere la dimostrazione per avere cpt. debole palle in V , e vedere dove ci si pianta.

— o — o —

TEOREMI DI SEPARAZIONE

Def. Sia V sp. normato, sia V' il duale, siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq V$ due sottoinsiemi (disgiunti).

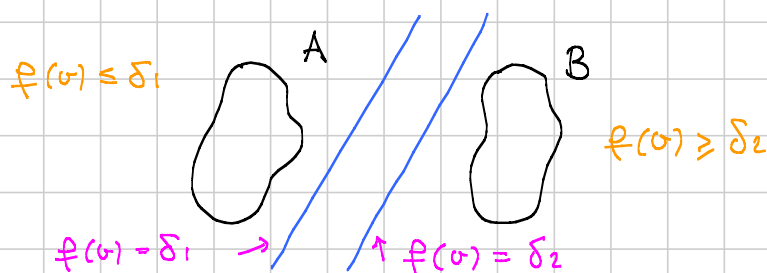
(1) Si dice che $f \in V'$ separa debolmente A e B se

$$f(a) < f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

(2) Si dice che $f \in V'$ separa fortemente A e B se esistono $\delta_1 < \delta_2$ t.c.

↑ stretto

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$



Teorema (Separazione debole) (1^a forma geo. di HB)

Siano V e V' come sempre. Siano A e B contenuti in V t.c.

(1) non vuoti e disgiunti

(2) CONVESSI

(3) A aperto

Allora esiste separazione debole.

Teorema (Separazione forte) (2^a forma geo. di HB)

Siano V e V' come sempre. Siano A e B contenuti in V t.c.

(1) non vuoti e disgiunti

(2) CONVESSI

(3) A compatto, B chiuso

Allora esiste separazione forte.

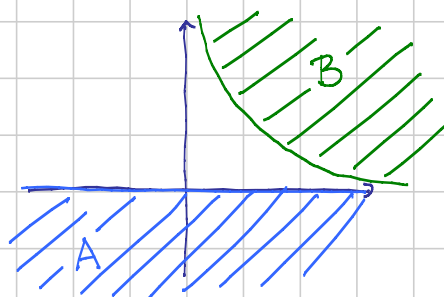
Corollario In particolare esiste una separazione forte di un p.to (compatto) da un convesso chiuso non vuoto.

Esempio 1 Nelle ipotesi del 1° non si può avere separazione forte.

(Già in $\mathbb{R}^2$: A = palla aperta, B = p.to del bordo)

Esempio 2 Due convessi chiusi si potrebbero non separare forte

In $\mathbb{R}^2$



In questo caso $f(x,y) := y$ separa debole ma non forte.

In dim. infinita potrebbero non separarsi nemmeno debole.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 54

Titolo nota

28/11/2019

PSEUDO-NORMA ASSOCIATA AD UN CONVESSO

(In inglese GAUGE, in francese JAUGE)

Sia V sp. normato, e sia $C \subseteq V$ tale che(i) C convesso non vuoto(ii) C aperto(iii) $0 \in C$.Definiamo $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$p(v) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\}$$

$$\forall v \in V$$

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) p è una pseudo-norma(2) Esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$0 \leq p(v) \leq M \|v\|_V$$

$$\forall v \in V$$

(3) vale la caratterizzazione

$$C = \{ v \in V : p(v) < 1 \}$$

Dim. Poniamo per semplicità

$$A(v) := \left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\} \subseteq (0, +\infty)$$

in modo tale che $p(v) = \inf A(v)$. Alcune proprietà

- $A(v) \neq \emptyset$ (uso che 0 è p.to interno)
- $A(v)$ è una semiretta destra (uso stellatura)
- $A(v)$ è aperto (uso che tutto C è aperto)
- $p(v) \notin A(v)$

(1) Due verifiche

- Pos. omogenea : segue da $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ per ogni $\lambda > 0$.
- Sub-additiva : segue da

$$A(v_1 + v_2) \geq A(v_1) + A(v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in V^2$$

(somma di sottospazi di $\mathbb{R}$)

Fatto questo, l'inf. della somma è la somma degli inf.
Come dimostro l'inclusione?

Siano $d_1 \in A(v_1)$ e $d_2 \in A(v_2)$. Sarebbe che
 $d_1 + d_2 \in A(v_1 + v_2)$

$$\frac{v_1 + v_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{v_1}{d_1} + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{v_2}{d_2} \in C$$

$\uparrow$ $\frac{v_1}{d_1} \in C$ $\uparrow$ $\frac{v_2}{d_2} \in C$ uso davvero C convesso
 numeri pos. con somma 1

(2) $p(v) \geq 0$ è ovvio.

Sarebbe $p(v) \leq M \|v\|$. Esiste $r > 0$ t.c. $\bar{B}(0, r) \subseteq C$.

Dico che vale con $M = \frac{1}{r}$.

Basta osservare che $\frac{1}{r} \|v\| \in A(v)$ cioè che

$$\frac{v}{\frac{1}{r} \|v\|} \in \bar{B}(0, r) \subseteq C.$$

(3) $C = \{v \in V : p(v) < 1\}$

$\boxed{\subseteq}$ Se $v \in C$, allora $1 \in A(v) \Rightarrow p(v) < 1$ (uso $A(v)$ aperto)

$\boxed{\supseteq}$ Se $p(v) < 1$, allora $1 \in A(v) \Rightarrow v \in C$.
 $\quad \quad \quad \text{---} \circ \text{---} \text{---}$

Prop.] Siano V e C come nella prop. prec.
 $\uparrow$
 convesso, aperto, $0 \in C$

Sia $v_0 \notin C$.

Allora possiamo separare debolmente v_0 e C .

Dim.] Sia $E = \text{Span}(v_0)$. Definisco $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f(\alpha v_0) := \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

È lineare e verifica $f(\alpha v_0) \leq p(\alpha v_0)$
 $\uparrow$ pseudonorma associata a C

Perché? Devo dim. che $\alpha \leq p(\alpha v_0)$. Se $\alpha \leq 0$ è evidente.

Se $\alpha > 0$ uso pos. omog. e mi riduco a

$$\alpha \leq \alpha p(v_0) \quad \rightsquigarrow \quad 1 \leq p(v_0)$$

$\uparrow$ segue dalla (3) di prima

MB estende f a tutto V rispettando la disug. con p .

Ora

$$f(v) \leq p(v) < 1 = f(v_0) \quad \forall v \in C$$

cioè vale la sep. debole.

Devo ancora dim. che f è continua. D'altra parte

$$f(v) \leq p(v) \leq M \|v\| \quad \forall v \in V$$

$\uparrow$ (2)

e questo implica la continuità. Nota bene: se $f(v) < 0$, allora

$$|f(v)| = -f(v) = f(-v) \leq M \|-v\| = M \|v\|.$$

— 0 — 0 —

Prop. Sia V sp. normato, sia $C \subseteq V$ convesso, aperto, $\neq \emptyset$,
sia $w_0 \notin C$.

Allora posso separare debolmente C da w_0

[Dim.] Scelgo a caso $w_0 \in C$ e osservo che

$C - w_0$ e $w_0 - w_0$
ricadono nella prop. prec.

[Dim. 1ª forma geo.] A convesso e aperto $\neq \emptyset$
 B convesso $\neq \emptyset$
 $A \cap B = \emptyset$

Considero $C := A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$

$$= \bigcup_{a \in A} \{a\} - B$$

Allora C è convesso, $\neq \emptyset$, aperto e $0 \notin C$.

Allora lo posso separare debolmente da 0 , cioè esiste $f \in V'$ t.c.

$$0 = f(0) < f(a - b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$$\text{cioè} \quad f(a) > f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

[Dim. 2ª forma geometrica] A convesso cpt $\neq \emptyset$
 B convesso chiuso $\neq \emptyset$
 $A \cap B = \emptyset$

Voglio separare forte.

Per $\varepsilon > 0$ poniamo

$$A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon)$$

(ε -intorni di A e B)

$$B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon)$$

A_ε e B_ε sono aperti se uso palle aperte.

Claim: per ε piccolo sono disgiunti, anche con $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Se non lo fossero, per ogni $n \in \mathbb{N}$ troverei

$$a_n \in A, \quad b_n \in B, \quad z_n \in B(0, \frac{1}{n}), \quad w_n \in B(0, \frac{1}{n})$$

$$\text{tali che} \quad a_n + z_n = b_n + w_n$$

Ora A è cpt., quindi esiste $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$. Ma allora

$$b_{n_k} = \underbrace{a_{n_k}}_{\rightarrow a_\infty} + \underbrace{z_{n_k}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{w_{n_k}}_{\rightarrow 0} \rightarrow a_\infty$$

Essendo B chiuso avremmo $a_\infty \in B$ e anche ad A .

Ora sia $A_{\varepsilon_0} \cap B_{\varepsilon_0} = \emptyset$ e sia f una separazione debole tra questi.

Claim: f è separazione forte tra A e B

$$f(a + \varepsilon_0 z) < f(b + \varepsilon_0 w) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \\ \forall z \in B(0, 1) \quad \forall w \in B(0, 1)$$

cioè

$$f(a) + \varepsilon_0 f(z) < f(b) + \varepsilon_0 f(w)$$

Scelgo z_0 t.c. $f(z_0) > 0$ e pongo $z = z_0$ e $w = -z_0$
Otengo

$$f(a) + \varepsilon_0 f(z_0) < f(b) - \varepsilon_0 f(z_0) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Prendo δ fra i due insieme e pongo

$$\delta_1 := \delta - \varepsilon_0 f(z_0) < \delta + \varepsilon_0 f(z_0) =: \delta_2.$$

Oss. Potero ingrassare uno solo dei 2 e andava bene uguale.

Teorema (Convesso + chiuso forte $\Rightarrow$ chiuso debole)

Sia V sp. normato, sia $C \subseteq V$ convesso e chiuso forte.
Allora C è chiuso debole.

Dim. Sia $\{u_m\} \subseteq C$ tale che $u_m \rightarrow u_\infty$.

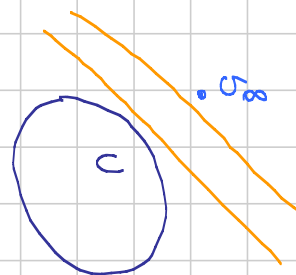
Dobbiamo dimostrare che $u_\infty \in C$.

Se così non fosse, sarebbe $u_\infty \notin C$,

ma allora per separazione forte

punto vs convesso chiuso

esiste $f \in V'$ ed esistono $\delta_1 < \delta_2$ t.c.



$$f(c) \leq \delta_1 < \delta_2 = f(u_\infty) \quad \forall c \in C.$$

La applico con $c = u_m$ e passando al limite ho un assurdo.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 55

Note Title

02/12/2019

SPAZI DI SUCCESSIONISpazi di successioni classici

- Dato $p \in [1, +\infty)$ si definisce ℓ^p l'insieme delle succ. $\{x_i\}$ t.c.

$$\|x\|_{\ell^p}^p := \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < +\infty \quad x_i \in \mathbb{R}$$

- Si definisce ℓ^∞ l'insieme delle succ. $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup \{ |x_i| : i \in \mathbb{N} \}$$

- Si considerano i seguenti 3 sottospazi di ℓ^∞ :

$$c := \{ \text{succ. } x_i \text{ che hanno limite per } i \rightarrow +\infty \}$$

$$c_0 := \{ \text{succ. } x_i \rightarrow 0 \text{ per } i \rightarrow +\infty \}$$

$$c_{00} := \{ \text{succ. } \{x_i\} : x_i = 0 \text{ definitivamente} \}$$

Chiaramente $c_{00} \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$.

Fatti generali:

- sono tutti sp. normati e vettoriali
- sono tutti completi tranne c_{00} (il cui completamento è c_0)
 [per ℓ^p si può usare il canone di vedere come $L^p(\mathbb{N})$ risp. a misura che conta i p.to o rifare dim. el. vista in ℓ^2 ;
 per c e c_0 sono i teo. di scambio di Analisi 2 per i limiti rispetto alla conv. unif.]

DUALE DI SPAZI DI SUCCESSIONI

Dati due qualunque succ. $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}$ e $\{y_i\} \subseteq \mathbb{R}$ possiamo

$$[Jy](x) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \quad (\text{Duality pairing})$$

Servono ipotesi su x e y affinché la serie converga.

Indichiamo con la successione che ha tutti 0 e un 1 in posizione n .

Oss. $C_{00} = \text{Span}(\{e_n\})$.

Enunciato brutale: il duale di ℓ^1 è ℓ^∞

Enunciato decente

Il duality pairing J definisce una mappa

$$J: \ell^\infty \rightarrow (\ell^1)'$$

che è

- ben definita
- lineare
- continua e isometrica
- bigettiva

Dim. Buona definitura e linearità

Devo dimostrare che $\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ converge se $x \in \ell^1$ e $y \in \ell^\infty$

La linearità sarà una facile verifica.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |x_i y_i| &\leq \max \{ |y_i| : i=0, 1, \dots, n \} \sum_{i=0}^n |x_i| \\ &\leq \|y\|_{\ell^\infty} \cdot \|x\|_{\ell^1} \end{aligned}$$

Essendo n arbitrario la serie converge assolutamente. Questo dice anche che

$$|[Jy](x)| \leq \|y\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell^1}$$

da cui la continuità.

Step 2: verifica isometria Da sopra abbiamo

$$\|Jy\|_{(\ell^1)'} \leq \|y\|_{\ell^\infty}$$

Serve disug. opposta. Se $y=0$ non è difficile. Altrimenti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|y_k| \geq \|y\|_{\ell^\infty} - \varepsilon$$

Definiamo $x \in \ell^1$ ponendo

$$x_i := \begin{cases} \text{sign}(y_k) & \text{se } k=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e osserviamo che $\|x\|_{\ell^1} = 1$. Ora

$$\|y\|_{\ell^\infty} - \varepsilon \leq |y_k| = [Jy](x) \leq \|Jy\|_{(\ell^1)'} \|x\|_{\ell^1} = \|Jy\|_{\ell^1}$$

e questa è la disug. opposta.

Step 3: bigettiva Iniettiva è ovvio dall'isometria.

Serve surgettiva, cioè per ogni $L \in (\mathcal{Q}^1)'$ esiste $y \in \mathcal{Q}^\infty$ t.c.

$$L(x) = [Jy](x) \quad \forall x \in \mathcal{Q}^1 \quad (\star)$$

Poniamo $y_i := L(e_i)$.

• Verifichiamo $y \in \mathcal{Q}^\infty$. Infatti

$$|y_i| = |L(e_i)| \leq \|L\|_{(\mathcal{Q}^1)'} \cdot \|e_i\|_{\mathcal{Q}^1} \stackrel{1}{\leq} \|L\|_{(\mathcal{Q}^1)'}$$

• Verifichiamo $(\star)$. Poniamo $\hat{L}(x) := [Jy](x)$ e osserviamo che L e $\hat{L}$ coincidono sugli e_i , quindi sul loro Span, il quale è DENSO in $\mathcal{Q}^1$.

Brutale: il duale di $\mathcal{Q}^p$ e $\mathcal{Q}^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, cioè $(\mathcal{Q}^p)' = \mathcal{Q}^{p'}$

Detto bene: il duality pairing definisce $J: \mathcal{Q}^{p'} \rightarrow (\mathcal{Q}^p)'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria (dunque continua)
- bigettiva.

Step 1: buona definitura Per ogni n vale

$$\sum_{i=0}^n |x_i y_i| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left\{ \sum_{i=0}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} \right\}^{1/p'} \leq \|x\|_{\mathcal{Q}^p} \cdot \|y\|_{\mathcal{Q}^{p'}}$$

Step 2 **Isometria** Da sopra

$$\|Jy\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_{\ell^{p'}} \leftarrow [\text{Conetto dopo video}]$$

Per la disuguaglianza opposta devo "scegliere x in funzione di y ".

Poniamo

$$x_i := |y_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_i)$$

Verifichiamo che $x \in \ell^p$ e $\|x\|_{\ell^p} = \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'/p}$. Infatti

$$\sum_{i=0}^n |x_i|^p = \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'p-p} = \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'}$$

$\uparrow$
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Leftrightarrow p + p' = pp'$

Passando al limite in n si ha

$$\|x\|_{\ell^p}^p = \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}$$

Ora

$$\begin{aligned} \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'} &= \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^{p'} = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{|y_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_i)}_{x_i} y_i \\ &= [Jy](x) \leq \|Jy\|_{(\ell^p)'} \cdot \|x\|_{\ell^p} \\ &\leq \|Jy\|_{(\ell^p)'} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'/p} \end{aligned}$$

Semplificando abbiamo disug. richiesta

Step 3 **Surgettività** Data $L: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ voglio trovare y che lo rappresenta.

Poniamo

$$y_i := L(e_i)$$

• Verifichiamo che $y \in \ell^{p'}$. Stesso conto di sopra

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} &= \sum_{i=0}^n \underbrace{|y_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_i)}_{z_i} \cdot y_i \\ &= \sum_{i=0}^n z_i L(e_i) \quad (\text{comb. lineare finita}) \\ &= L\left(\sum_{i=0}^n z_i e_i\right) \\ &\leq \|L\|_{(\ell^p)'} \left\| \sum_{i=0}^n z_i e_i \right\|_{\ell^p} \\ &= \|L\|_{(\ell^p)'} \left\{ \sum_{i=0}^n |z_i|^p \right\}^{1/p} \quad (\text{per il conto di prima}) \\ &= \|L\|_{(\ell^p)'} \left\{ \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Portando a sx e facendo il lim per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\|y\|_{\ell^{p'}} \leq \|L\|_{(\ell^p)'}$$

• Per avere che $L = Jy$ basta osservare che coincidono in $\operatorname{Span}(\{e_i\})$, il quale è denso in ℓ^p .
 — o — o —

(Questo non sarà più vero in ℓ^∞)

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 56

Note Title

02/12/2019

VIAGGIO INTORNO AL DUALE DI ℓ^∞ Brutale: ℓ^1 non è il duale di ℓ^∞ Tuttavia J definisce una $J: \ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria (e quindi continua)
- iniettiva ma (purtroppo?) NON surgettiva.

Step 1: buona positura Dati $y \in \ell^1$ e $x \in \ell^\infty$ vale

$$\sum_{i=0}^n |x_i y_i| \leq \max \{ |x_i| : i=0,1,\dots,n \} \sum_{i=0}^n |y_i|$$

$$\leq \|x\|_{\ell^\infty} \|y\|_{\ell^1}$$

Step 2: isometria Da sopra

$$\|Jy\|_{(\ell^\infty)'} \leq \|y\|_{\ell^1}$$

Per la disug. opposta definiamo $x \in \ell^\infty$ ponendo

$$x_i := \operatorname{sign}(y_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e osserveremo che $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$ se $y \neq 0$. Inoltre

$$\|y\|_{\ell^1} = \sum_{i=0}^{\infty} y_i x_i \leq \|Jy\|_{(\ell^\infty)'} \|x\|_{\ell^\infty} = \|Jy\|_{(\ell^\infty)'}$$

Oss profonda: il caso di ℓ^1 è stato ℓ^1 unico in cui abbiamo dovuto usare gli ε in questa fase.

Step 3 Data $L: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ posso porre $y_i := L(e_i)$
e verificare che $y \in \ell^1$. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} |y_i| &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\text{sign}(y_i)}_{z_i} y_i = \sum_{i=0}^{\infty} z_i L(e_i) \\ &= L\left(\sum_{i=0}^{\infty} z_i e_i\right) \leq \|L\|_{(\ell^\infty)'} \cdot \left\| \sum_{i=0}^{\infty} z_i e_i \right\|_{\ell^\infty} \\ &\leq \|L\|_{(\ell^\infty)'} \end{aligned}$$

A questo punto L e Jy coincidono su $\text{Span}(\{e_i\})$ che però non è denso in ℓ^∞ .

Tuttavia abbiamo dimostrato che $J: \ell^1 \rightarrow (C_0)'$ è

- ben definita
- lineare
- isometria
- bigettiva (ora funziona che $\text{Span}(\{e_i\})$ è denso)

DUALE DI C_{00} È ℓ^1 con la stessa J di sopra!

Dim. C_{00} è denso in C_0 (che quindi ce è il completamento: vedi analisi 2).

Ogni $L: C_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo è pure lip, quindi unif. cont., quindi (Analisi 2) si estende in modo unico a C_0 .

Gli elementi di $(C_{00})'$ sono le restrizioni di elementi di $(C_0)'$.

Achtung! Non varia sulle funzioni che il duale di $C^0(X)$
o $C_c^0(X)$ è ℓ^1 !!!!

Ultra-brutal: il duale di c è ℓ^1 .

Semi-brutal: il duale di c è $\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ e questo è ℓ^1

Detto per bene: $\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ come spazio vettoriale è $\ell^1 \oplus \mathbb{R}$, cioè

$$\{(x, x_\infty) : x \in \ell^1, x_\infty \in \mathbb{R}\}$$

con norma

$$\|(x, x_\infty)\|_{\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}} := \|x\|_{\ell^1} + |x_\infty|$$

Definiamo $J: \ell^1 \oplus_1 \mathbb{R} \rightarrow c'$ ponendo

$$[Jy](x) := \sum_{i=0}^{\infty} y_i x_i + y_\infty x_\infty$$

$\text{"} \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{"}$

Si ha che J è

- ben definita
- lineare
- isometria
- bigettiva.

Inoltre $\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ è isometrico e isomorfo come sp. vet. a ℓ^1

$$((x_0, x_1, \dots), x_\infty) \rightsquigarrow (x_\infty, x_0, x_1, \dots)$$

Dim Step 1: buona definizione $y = (\{y_i\}, y_\infty)$

$$|[Jy](x)| \leq \|x\|_{\ell^\infty} \cdot \|\{y_i\}\| + \overset{\lim x_i}{|x_\infty|} \cdot |y_\infty|$$

$$\leq \|x\|_{\ell^\infty} \cdot \|y\|_{\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}}$$

$$\leq \|x\|_{\ell^\infty} \cdot \|y\|_{\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}}$$

$\|x\|_c$

Step 2: Isometria Esattamente lo stesso conto di C_0 o ℓ^∞ .

[Dopo video: leggermente più delicato (sia per C sia per C_0) perché $x_i = \sup(y_i)$ potrebbe non essere finito]

Step 3: Surgettività Data $L: C \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo

$$y_i := L(e_i)$$

$$y_\infty := L(1, 1, 1, \dots) - \sum_{i=0}^{\infty} L(e_i)$$

- Verifichiamo che $(\{y_i\}, y_\infty) \in \ell^1 \oplus \mathbb{R}$.

L'unica cosa da dim. è che $\sum_{i=0}^{\infty} |L(e_i)|$ converge e questo è lo stesso conto di C_0 o ℓ^∞ .

- Resta solo da verificare che Jy e L coincidono in C .
Noi sappiamo per costruzione che coincidono in e_i e in $e_\infty := (1, 1, 1, \dots)$ (fare bene la verifica per e_∞ e capire perché abbiamo sottratto la serie!).
Ma questi spannano un denso (basta togliere ad una succ. e_∞ moltiplicato il limite).

— 0 — 0 —

Esercizio Trovare un elemento di $(\ell^\infty)'$ che NON si rappresenta come Jy per un qualche $y \in \ell^1$

Idea: l'applicazione $Lx := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ è ben definita

e continua in C , anzi è 1-lip. HB la estende in modo 1-lip a tutto ℓ^∞

Perché questa NON è rappresentabile da J ? Perché se almeno uno degli y_i è $\neq 0$ basta cambiare il valore del corrispondente x_i e $[Jy](x)$ cambia, mentre il limite della successione non cambia. Altro modo: pensare a $L(e_i)$.

Chi è l'extender del limite !!!

Idea #1: il limsup (NON è molto lineare)

Idea #2: CESARO (vedi Analisi 1)

Forse funziona definendo $CC :=$ spazio delle succ. per cui un passo di Cesaro assicura il limite
(Esercizio: caratterizzare il duale CC')

Fatto vero: l'extender è drammaticamente non unico!!!

Prendiamo $(2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots) = s$

Claim: $L(s)$ può essere un qualunque numero compreso tra 2 e 3.

Tornando nella dir. di MB, c'erano 2 vincoli

$$L(s+v) \leq p(s+v) - L(v) \quad \forall v \in \text{s.sp. dove tutto ok}$$

$$L(s-v) \geq L(v) - p(s-v)$$

Esaminiamo la 1°:

$$L(s+v) \leq \|s+v\|_{\ell^\infty} = \lim v_i \quad \forall v \in C$$

Usando $v \equiv 0$ troviamo $L(s) \leq 3$

Analogamente $L(s) \geq 2$.

In questo modo definiamo $L: \text{Span}(c, s) \rightarrow \mathbb{R}$
 ponendo

$$L(v) = \sum v_i$$

$$\text{se } v \in C$$

$$L(s) = 2,71$$

$$\text{se } s = (2, 3, 2, 3, \dots)$$

Questa è lineare e 1-lip., quindi HB me la estende a ℓ^∞ .

Esercizio Deciso cosa fa in $(2, 3, 2, 3, \dots)$, è
 obbligato quello che fa in altre succ. ???

Ad esempio in $(3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 4, \dots)$
 — o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 57

Note Title

03/12/2019

DUALI DI SPAZI L^p

Setting: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dove X è un insieme, $\mathcal{M}$ è una σ -algebra di sottoinsiemi di X , $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura (num. additiva sui disgiunti)

Caso base: $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ cioè $\mu(X) < +\infty$

Casi più generali: μ è σ -finita (X è unione numerabile di sottoinsiemi di misura finita), oppure μ qualunque.

Spazi $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ per $p \in [1, +\infty]$ estremi inclusi.
Sono spazi normati completi.

Teorema misterioso (RADON-NIKODYM) (versione finita)

Sia X insieme, $\mathcal{M}$ σ -algebra di sottoinsiemi

Sia $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ misura (quindi $\mu(X) < +\infty$)

Sia $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ misura con segno (può assumere anche valori negativi, e num. additiva sui disgiunti)

Supponiamo ν assolutamente continua rispetto a μ , cioè

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Allora esiste $g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ t.c.

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu$$

— 0 — 0 —

Def. (Duality pairing tra funzioni) Date due funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo

$$[Jg](f) := \int_X f(x)g(x) d\mu$$

Oss. L'integrale che definisce J ha senso sotto opportune ipotesi su f e g , ad esempio se

$$f \in L^p(X, m, \mu) \quad \text{e} \quad g \in L^q(X, m, \mu)$$

$$\text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{interpretata se } p=1 \text{ oppure } p=+\infty)$$

Questo segue da Hölder.

DUALE DI $L^1(X, m, \mu)$

Versione brutale: il duale di L^1 è L^∞

Versione precisa: il duality pairing induce una mappa

$$J: L^\infty(X, m, \mu) \rightarrow [L^1(X, m, \mu)]'$$

che è

- ben definita
- lineare
- isometria
- bigettiva

Dim. **Step 1: buona definizione**

Per ogni $g \in L^\infty$, la funzione $f \rightarrow \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu$ è un elemento di $(L^1)'$. Diremo che $Jg \in (L^1)'$

- È facile che l'integrale ha senso
- " " " è lineare come funzione di f
- La continuità rispetto alla norma L^1 segue dalla stima

$$\left| \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu \right| \leq \|g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^1}$$

Step 2: isometria Dobbiamo dimostrare

$$\|Jg\|_{(L^1)'} = \|g\|_{L^\infty}$$

La disug. $\leq$ segue dalla fine del passo precedente.

Per quella opposta, dobbiamo, data g , scegliere bene f .

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di norma ∞ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ con $\text{meas}(A_\varepsilon) > 0$ b.c.

$$|g(x)| \geq \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

Usiamo

$$f(x) = \begin{cases} \text{sign}(g(x)) & \text{se } x \in A_\varepsilon \\ 0 & \text{se } x \notin A_\varepsilon \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} (\|g\|_{L^\infty} - \varepsilon) \text{meas}(A_\varepsilon) &\leq \int_{A_\varepsilon} |g(x)| \, d\mu = \int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) \, d\mu \\ &\leq \|Jg\|_{(L^1)'} \cdot \|f\|_{L^1} \leq \|Jg\|_{(L^1)'} \cdot \text{meas}(A_\varepsilon) \end{aligned}$$

Semplificando $\text{meas}(A_\varepsilon)$ (che è > 0) e sfruttando che ε è arbitrario, abbiamo allora disug.

Step 3: surgettività Data $L: L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, dobbiamo trovare $g \in L^\infty$ t.c. $L = \int g$.

3.1 Costruzione della misura ν Per ogni $A \in \mathcal{M}$, poniamo

$$\nu(A) := L(1_A)$$

$\uparrow$ funzione caratt. di A che sta in L^1

Claim: ν è misura assol. cont. rispetto a μ

- $\nu(\emptyset) = 0$: facile verifica
- $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$: facile verifica $1_A \equiv 0$ in L^1 .
- ν è numerabilmente additiva. Prendiamo $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ a due a due disgiunti.

L'osservazione chiave è che

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^m A_i} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{in } L^1(X) & & \text{convergenza puntuale p.o.} \\ & & \text{dominata dalla costante 1 che} \\ & & \text{sta in } L^1(X) \end{array}$$

(questo vale pure in L^p se $p < +\infty$)

A questo

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^m A_i}\right)$$

$\uparrow$ fatto sopra
+ L continua L^1

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} L\left(\sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{A_i}\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m L(\mathbb{1}_{A_i}) \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Ai disgiunti} \end{array} \\ &\stackrel{\text{def } \nu}{=} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \nu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i). \end{aligned}$$

3.2 Costruzione della g

$RN \Rightarrow$ esiste $g \in L^1$ t.c. $\nu(A) = \int_A g(x) d\mu$ per ogni AEM.

Dobbiamo però dimostrare che $g \in L^\infty$. Per farlo dimostriamo che

$$|g(x)| \leq \|L\|_{(L^1)'} \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{X}.$$

Supponiamo infatti che non sia vero. Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

$$|g(x)| \geq \|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon$$

su un insieme A_ε di misura positiva. Wlog supponiamo pure che

$$g(x) \geq \|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

(l'altro caso è analogo).

Allora

$$\begin{aligned} (\|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon) \operatorname{meas}(A_\varepsilon) &\leq \int_{\mathbb{X}} g(x) \mathbb{1}_{A_\varepsilon}(x) d\mu \\ &= \nu(A_\varepsilon) \\ &= L(\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) \\ &\leq \|L\|_{(L^1)'} \cdot \|\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\|_{L^1} \\ &= \|L\|_{(L^1)'} \cdot \operatorname{meas}(A_\varepsilon) \end{aligned}$$

Semplificando la misura si ottiene un assurdo.

3.3] Conclusione . Dimostriamo che $L = Jg$.

Noi sappiamo che

$$\begin{aligned} L(1_A) &= \nu(A) = \int_{\mathbb{X}} g(x) 1_A(x) d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M} \\ &= Jg(1_A) \end{aligned}$$

cioè L e Jg coincidono sulle caratteristiche di misurabili.
Concludiamo osservando che spaziano un denso in L^1
(osserviamo che questo vale sempre se $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$).
— o — o —

DUALE DI L^p con $p \in (1, +\infty)$

Versione breve: $(L^p)' = L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Versione lunga: il duality pairing ... $J : L^p \rightarrow (L^p)'$ t.c....

Step 1: buona definitura Segue da Hölder via disug.

$$\left| \int_{\mathbb{X}} fg d\mu \right| \leq \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

Step 2: Isometria Sene $\|Jg\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^p}$

⊆ Segue da sopra

⊇ Dobbiamo, data g , scegliere f . Possiamo

$$f(x) := |g(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g(x))$$

e osserviamo che $f \in L^p$ e vale

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu \quad (\text{stesso conto che con le successioni})$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu &= \int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) d\mu \\
 &= [Jg](f) \\
 &\leq \|Jg\|_{(L^p)'} \cdot \|f\|_{L^p} \\
 &= \|Jg\|_{(L^p)'} \left\{ \int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p} \\
 &= \|Jg\|_{(L^p)'} \left\{ \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu \right\}^{1/p}
 \end{aligned}$$

Semplificando abbiamo disug. voluta.

—o —o—

to be continued...

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 58

Note Title

03/12/2019

Step 3 : surgettività Data $L : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, occorre trovare $g \in L^{p'}$ t.c. $L = Jg$.

3.1 Definizione della misura. Come prima possiamo

$$v(A) := L(1_A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

e verifichiamo che è misura assol. cont. rispetto a μ .
È lo stesso conto di prima usando

$$\| \bigcup_{i=1}^n A_i \| \rightarrow \| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \| \quad \text{in } L^p(X)$$

3.2 Definizione di g . RN produce $g \in L^1$ (ma noi vorremmo $L^{p'}$)
t.c.

$$L(1_A) = v(A) = \int_A g(x) d\mu = [Jg](1_A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

3.3 Jg ed L coincidono in L^∞ $\leftarrow$

Per ora sappiamo solo che $g \in L^1$, quindi Jg è ben definito, lineare e continuo SOLO in L^∞ .

Ora L e Jg coincidono sulle caratteristiche di elem. di $\mathcal{M}$, quindi coincidono su L^∞ perché lo span delle caratt. è denso in L^∞ . (È vero che è denso pure in L^p , ma per ora non sappiamo $\uparrow$ che Jg è continuo in L^p)
rispetto alla norma di L^∞

3.4 Dimostriamo che $g \in L^{p'}$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la troncata

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } -n \leq g(x) \leq n \\ n & \text{se } g(x) \geq n \\ -n & \text{se } g(x) \leq -n \end{cases}$$

e possiamo

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g_n(x)) \\ &= |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g(x)) \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'} d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g_n(x)) \cdot g_n(x) d\mu$$

Ho sostituito
 $|g_n(x)| \leq |g(x)|$

$$\leq \int_{\mathbb{X}} \underbrace{|g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g(x))}_{f_n(x)} \cdot g(x) d\mu$$

$$= [Jg](f_n) = L(f_n) \quad \begin{array}{l} \text{perché } f_n \in L^\infty \text{ e quindi} \\ \text{lo sappiamo !!!} \end{array}$$

$$\leq \|L\|_{(L^p)'} \cdot \|f_n\|_{L^p}$$

$$= \|L\|_{(L^p)'} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{X}} |f_n(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}$$

stesso conto dello
step 2

$$= \|L\|_{(L^p)'} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'} d\mu \right\}^{1/p}$$

Semplificando otteniamo

$$\|g_n\|_{L^{p'}} \leq \|L\|_{(L^p)'} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Essendo n arbitrario abbiamo da tesi $(|g_n| \rightarrow |g|$ crescendo, quindi qui si usa Beppo-Levi).

3.5 Conclusione Ora Jg è continuo in L^p , rispetto alla norma di L^p , e coincide con L sulle caratt. dei misurabili (e pure in L^∞).
Quindi coincide in L^p .

— o — o —

Cosa resta vero nel caso di L^∞

Il duality pairing induce una mappa $J: L^1 \rightarrow (L^\infty)'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria
- iniettiva ma NON surgettiva

Step 1 Solito Hölder

Step 2 $\|Jg\|_{(L^\infty)'} = \|g\|_{L^1}$

⊆ Segue come sempre da Hölder

⊇ Data g , occorre scegliere $f(x) = \text{sign}(g(x))$ e osservare che

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1} &= \int_X g(x) f(x) d\mu \leq \|Jg\|_{(L^\infty)'} \|f\|_{L^\infty} \\ &\leq \|Jg\|_{(L^\infty)'} \end{aligned}$$

Step 3 Dove ci si pianta nella surgettività?

Dopo aver definito V , otteniamo facilmente che V è FINITAMENTE additiva, ma non nec. num. additiva (le misure fin. add. e assol. cont. si caratterizzano molto male).

— o — o —

DUALE DEGLI HILBERTSia H spazio di HilbertVersione breve: $H' = H$

Versione lunga: il duality pairing

$$[Jv](w) := \langle v, w \rangle \quad \forall (v, w) \in H^2$$

definisce una mappa $J: H \rightarrow H'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria
- surgettiva (bigettiva)

} Facile esercizio

Resta da dim. la surgettività, cioè per ogni $L: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, esiste $v \in H$ t.c.

$$L(x) = \langle v, x \rangle \quad \forall x \in H$$

Dim 1: via base ortonormale

(serve H separabile, oppure accettare basi + che numerabili prodotte da CA)

Sia $\{e_i\}$ la base e consideriamo il vettore v che ha compon.

$$v_i := L(e_i)$$

Se un tale v esiste, allora $L(x)$ e $\langle v, x \rangle$ coincidono sulla base, che spazza un denso, quindi coincidono in H .

Serve che $\sum_{i=1}^n v_i^2 < +\infty$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=1}^m v_i^2 = \sum_{i=1}^m v_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^m v_i L(e_i)$$

linearità $\nearrow = L\left(\sum_{i=1}^m v_i e_i\right)$

$$\leq \|L\|_{H^1} \cdot \left\| \sum_{i=1}^m v_i e_i \right\|_H$$

$$= \|L\|_{H^1} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m v_i^2 \right\}^{1/2}$$

Semplificando, abbiamo stima unif. in m .

Dim 2: via proiezione sul convesso Consideriamo

$$K := \ker(L)$$

$\bar{K}$ è un s.sp. vett. (quindi convesso) e chiuso (L è continua).

Se $K = H$, allora basta prendere $v = 0$.

Se $K \neq H$, allora esiste un vettore $v_0 \in H$ t.c.

$$\|v_0\| = 1 \quad \text{e} \quad v_0 \in K^\perp$$

Per averlo, basta prendere $w_0 \notin K$, poi considerare $w_0 - P_K w_0$ che è ortogonale a K (teo. precedente) e normalizzare.

Claim: vale la rappresentazione con $v := L(v_0)v_0$
Dobbiamo dimostrare che

$$L(x) = \langle L(v_0)v_0, x \rangle \quad \forall x \in H$$

Questo è vero per ogni $x \in K$ ed è vero per $x = v_0$,
quindi ci basta dimostrare che ogni $x \in H$ si scrive come

$$x = \alpha v_0 + w \quad \text{con } w \in K$$

Basta scegliere $\alpha = \frac{L(x)}{L(v_0)}$ in modo che $w = x - \frac{L(x)}{L(v_0)} v_0$

e quindi $L(w) = L(x) - \frac{L(x)}{L(v_0)} L(v_0) = 0 \Rightarrow w \in \ker.$

— o — o —

IL PARADOSSO

Osserviamo che $H^1((-1,1)) \subseteq L^2((-1,1))$ ed è più denso

Moralmente: H^1 è + piccolo di L^2

Consideriamo $L: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua.

Per restrizione, questa definisce

$$\hat{L}: H^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{lineare e continua}$$

(è continuo perché per ipotesi $|L(u)| \leq \text{cost} \cdot \|u\|_{L^2}$,
quindi a maggior ragione $|L(u)| \leq \text{cost} (\|u\|_{H^1})$)

L'applicazione $(L^2)' \ni L \rightarrow \hat{L} \in (H^1)'$

è lineare e INIETTIVA (se $\hat{L} = 0$, allora anche $L = 0$
perché H^1 è denso)

Moralmente: $(H^1)'$ è più grande di $(L^2)'$

Ma essendo Hilbert dovrebbe essere $L^2 = (L^2)'$ e $H^1 = (H^1)'$

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

—

LEZIONE 59

Note Title

05/12/2019

BIDUALE E SPAZI RIFLESSIVI

Def. (Iniezione canonica) Sia V uno sp. normato e sia $(V')'$ il suo bidual, cioè il duale (top.) del duale (top.).

L'iniezione canonica è la mappa

$$J : V \rightarrow (V')'$$

definita da

$$[Ju](\varphi) := \varphi(u) \quad \forall u \in V, \forall \varphi \in V'$$

Propr. L'iniezione canonica è un'isometria lineare, dunque in particolare iniettiva.

Dim Linearità: semplice verifica.

Fissato $v \in V$, vogliamo dim. che $\|Ju\|_{(V')'} = \|u\|_V$.

$$\leq \text{Segue da } |[Ju](\varphi)| = |\varphi(u)| \leq \|u\|_V \cdot \|\varphi\|_{V'}$$

Facendo il sup al RHS su tutte le $\varphi \in V'$ con $\|\varphi\|_{V'} \leq 1$ segue la tesi.

$$\geq \text{Dato } u, \text{ vogliamo trovare } \varphi \in V' \text{ t.c. } |[Ju](\varphi)| = \|u\|_V \text{ e } \|\varphi\|_{V'} \leq 1.$$

Ma questo è il funzionale allineato.

— o — o —

Def. Uno spazio normato V si dice **RIFLESSIVO** se la J è **surgettiva**.

Oss. In questo caso V è isometrico al suo bidual, dunque in particolare V è un duale, quindi è per forza Banach.

Achtung! Esistono esempi perversi di spazi V che sono isometrici linearmente con $(V')'$, ma non sono riflessivi.

Morale: per essere riflessivi proprio la J deve essere l'identificazione.

Teorema (Compattanza debole delle palle)

Sia V sp. normato e sia $\{v_m\} \subseteq V$ una succ.

Supponiamo che

(i) V riflessivo,

(ii) V' separabile (può da pagare per usare la succ.)

(iii) $\{v_m\}$ limitata.

Allora esiste $\{m_k\}$ crescente, ed esiste $v_\infty \in V$ t.c.

$$v_{m_k} \rightarrow v_\infty.$$

Dim **Step 1** "Accontentare un deuso"

Sia $D \subseteq V'$ un deuso numerabile. Per ogni $f \in D$ si ha che

$$|f(v_m)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|v_m\|_V$$

$\uparrow$ ipotesi (iii)

e quindi è limitato in m . Con il solito proc. diagonale otteniamo $\{m_k\}$ t.c.

$$f(v_{m_k}) \rightarrow \text{qualcosa} \quad \forall f \in D$$

$$=: L(f)$$

Abbiamo definito $L: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Step 2 "Chi accontenta il deuso accontenta tutti"

Si tratta di dim. che

$$f(u_{n_k}) \rightarrow \text{qualcosa} =: L(f) \quad \forall f \in V'$$

↑
la stessa di prima

In questo modo abbiamo definito $L: V' \rightarrow \mathbb{R}$

[Basta dim. che $\{f(u_{n_k})\}$ è di Cauchy]

Step 3 "Uso della rappresentazione"

Si verifica facilmente che

- L è lineare
 - L è continua
- } limite puntuale di mappe lineari e equi-lip.

Ma allora $L \in (V')'$. Per riflessività esiste $u_\infty \in V$ t.c.

$$L(f) = f(u_\infty) \quad \forall f \in V'$$

Questo completa la dim.

— o — o —

[Aggiunto dopo video: con duale separabile]

Prop. Sia V sp. normato RIFLESSIVO e sia $f \in V'$.

Allora

$$\|f\|_{V'} = \max \{ |f(u)| : u \in V, \|u\|_V \leq 1 \}$$

↑
e non solo il sup

Dim. In generale è il sup. Sia $\{u_m\}$ una succ. suppizzante, cioè

$$\|u_m\|_V \leq 1 \quad \text{e} \quad |f(u_m)| \rightarrow \|f\|_{V'}.$$

Essendo limitata, esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ con $\|u_\infty\|_V \leq 1$ (per sci. debole della norma).

A questo p.to

$$|f(u_m)| \rightarrow |f(u_\infty)| \quad \text{quindi sup realizzato.}$$

— o — o —

Oss. Il realizzatore del max possiamo pensarlo come "vettore allineato al funzionale".

Esempio In ℓ^1 consideriamo $f: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \arctan(i)$$

È chiaro che $\|f\|_{(\ell^1)'} = \frac{\pi}{2} = \|\{\arctan i\}\|_{\ell^\infty}$

Tuttavia non esiste $x \in \ell^1$ che realizza $\frac{\pi}{2}$, perché la disuguaglianza

$$|f(x)| < \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

è sempre stretta.

Altro esempio $V = \{u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue f.c. } u(0)=0\}$
 è una Banach rispetto alla norma del sup
 (verifica per esercizio)

Il funzionale

$$f(u) := \int_0^1 u(x) dx$$

sta in V' e ha $\|f\|_{V'} \leq 1$.

Tuttavia non esiste $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ e $f(u) = 1$.
 — o — o —

Oss. Nel caso di applicazioni lineari tra 2 spazi, con anello $\neq \mathbb{R}$, può accadere che la costante non sia realizzata anche se è tutto Hilbert.

Esempio $H = L^2((0,1))$ $L: H \rightarrow H$

$$(Lu)(x) = x u(x)$$

• Facile: $\|Lu\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$

• L'uguaglianza non si può realizzare perché

$$x^2 u(x)^2 < u(x)^2$$

è sempre stretta.

Esercizio: come si approx. il sup.

Esempio H separabile con base $\{e_n\}$. Poniamo $L: H \rightarrow H$ definita da

$$L(e_n) := \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_n$$

Anche in questo caso $\|L\|_{\mathcal{L}(H,H)} = 1$, ma non viene realizzata.

— o — o —

Ci sono legami tra separabilità di V e V' ?

V separabile $\Rightarrow V'$ separabile?

In generale no (pensare a $\ell^1 - \ell^\infty$), ma sì se V è riflessivo.

Teorema In generale vale

V' separabile $\Rightarrow V$ separabile

Dim. **Step 1** La sfera unitaria di V' è separabile
(sottoinsieme di metrico sep. è sep.)

Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ con $\|f_n\|_{V'} = 1$ un denso numerabile nella sfera.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in V$ tale che $\|u_n\|_V \leq 1$

$$f_n(u_n) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{specie di vettore allineato, posso arrivare vicino a } \pm 1 \text{ a piacere})$$

Sia W lo span dei $\{u_n\}$. Se dim. che W è denso abbiamo finito (il denso numerabile in V diventano le comb. lin. dei $\{u_n\}$ a coeff. in $\mathbb{Q}$).

Step 2 Dim. che W è denso.

Se così non fosse, esisterebbe $v \in V \setminus \text{clos}(W)$.

Posso anche supporre $\|v\|_V = 1$ se serve.

Ma allora esisterebbe $f \in V'$ t.c. $\|f\|_{V'} = 1$ e

$$f(v) = 1 \quad \text{e} \quad f(u_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(lo costruisco con HB definendolo come sopra in $W \oplus \mathbb{R}v$)

Questo f sta nella sfera unitaria di V' , quindi esiste f_n t.c.

$$\|f - f_n\|_{V'} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \leq 1$$

eol in particolare $|f(u_n) - f_n(u_n)| \leq \|f - f_n\|_{V'} \cdot \|u_n\|_V \leq \frac{1}{4}$

Ma allora

$$0 = |f(u_n)| = |f_n(u_n) + f(u_n) - f_n(u_n)|$$

$$\geq |f_n(u_n)| - |f(u_n) - f_n(u_n)| \geq \frac{1}{4} \quad \text{e questo è un guaio.}$$

$$\geq \frac{1}{2} \quad \text{---} \quad \geq -\frac{1}{4}$$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 60

Note Title

05/12/2019

Come dimostro che il duale di $L^p(\mathbb{R})$ è $L^{p'}(\mathbb{R})$ (con $p < +\infty$) e più in generale per aperti di $\mathbb{R}^d$ con misura non finita

Dim., nel caso di $\mathbb{R}$ (poi è uguale)

- Data $L : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, per restrizione otteniamo $L_k : L^p((-k, k)) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua

- Per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo rappresentare, ottenendolo che

$$L_k(f) = \int_{-k}^k g_k(x) f(x) dx \quad \forall f \in L^p((-k, k))$$

- Se $k_2 > k_1$, allora $g_{k_2}(x) = g_{k_1}(x)$ per ogni $x \in [-k_1, k_1]$

[Qualche forma di FLCV]

- Definiamo $g_\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ "incollando" le g_k e dimostriamo

che $g_\infty \in L^{p'}(\mathbb{R})$ (segue da equi-bound su $\|g_k\|_{L^{p'}}$)
e che g_∞ rappresenta su tutto $\mathbb{R}$ (le troncature di f fuori da $(-k, k)$ convergono ad f in $L^p(\mathbb{R})$).

— o — o —

Finalmente abbiamo ottenuto la comp. debole delle palle in $L^p(\Omega)$ con $p > 1$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.

Nel caso $p = +\infty$ abbiamo la comp. debole * vedendo L^∞ come duale di L^1 .

Dim. "con le mani" nel caso $p=4$

Data $\{f_n\} \subseteq L^4(\Omega)$ limitata, vogliamo trovare n_k e $f_\infty \in L^4(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f_{n_k}(x) g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f_\infty(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^{4/3}(\Omega).$$

Step 1 Accontentiamoci un denso $D \subseteq L^{4/3}(\Omega)$ numerabile, nel senso che

$$\int_{\Omega} f_{n_k}(x) g(x) dx \rightarrow \text{qualcosa} \quad \forall g \in D$$

$$=: L(g)$$

Step 2 Mostriamo che n_k va bene sempre, cioè

$$\int_{\Omega} f_{n_k}(x) g(x) dx \rightarrow \text{qualcosa} \quad \forall g \in L^{4/3}(\Omega)$$

$$=: L(g)$$

dove ora $L: L^{4/3}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Step 3 Verifichiamo che L è lineare e continuo, quindi grazie al teorema di rappresentazione sappiamo che

$$L(g) = \int_{\Omega} g(x) f_\infty(x) dx$$

per una opportuna $f_\infty \in L^4(\Omega)$.

Oss. Per $p=1$ non c'è nemmeno il denso numerabile in $L^\infty(\Omega)$.

— o — o —

[Aggiunto dopo video: poi, beninteso, ci sarebbe il problema insormontabile di rappresentare con una $f_\infty \in L^4$ il limite $L: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ottenuto.]

ESERCIZIO ALLA LAX-MILGRAM

Data $f \in L^2((a,b))$ vogliamo risolvere $u'' = f$ e $u(a) = u(b) = 0$.
 Più in generale, data $f \in L^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto
 vogliamo risolvere

$$\Delta u = f \quad \text{o più in gen.} \quad \operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f$$

con A matrice unif. ellittica e u nulla al bordo

1° approccio: variazionale Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2} u'^2 + f u \right] dx$$

$$F(u) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + f(x) u(x) \right\} dx$$

Mostriamo con il metodo diretto che esiste un u in H_0^1 e
 ricavando ELE vediamo che è sol. debole dell'eq. richiesta

2° approccio: alla LAX-MILGRAM

Una soluzione debole
 dell'eq. è una funzione

$u \in H_0^1((a,b))$ tale

$$-\int_a^b u'(x) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1((a,b))$$

Consideriamo in $H_0^1((a,b))$ il prodotto scalare

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \int_a^b u'(x) v'(x) dx$$

È un prod. scalare davvero?

- Bilineare è quasi ovvio
- Non negativo pure

Teorema anatrato (sci forte + convessa $\Rightarrow$ sci debole)

Sia V sp. normato e sia $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è convessa

(ii) f è sci forte ($u_n \rightarrow u_\infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u_\infty)$)

Allora f è sci debole.

Dim. Versione veloce: i sottolivelli di f sono convessi e chiusi forte, dunque chiusi deboli.

Versione lenta concreta: consideriamo la s.succ. $\{u_{n_k}\}$ b.c.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}) = l$$

Se $l = +\infty$ siamo contenti.

Se $l \in \mathbb{R}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo

$$S(l+\varepsilon) := \{u \in V : f(u) \leq l+\varepsilon\}.$$

Ora $S(l+\varepsilon)$ è convesso e chiuso forte e inoltre $u_{n_k} \in S(l+\varepsilon)$ definitivamente. Ma poiché $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ per il teorema sugli insiemi sappiamo che

$$u_\infty \in S(l+\varepsilon) \quad \text{cioè} \quad f(u_\infty) \leq l+\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario segue che $f(u_\infty) \leq l$.

Se $l = -\infty$ si fa allo stesso modo con

$$S(M) := \{u \in V : f(u) \leq M\}.$$

Weierstrass generalizzato stile analisi 2

Sia V normato, sia $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è SCI forte

(ii) si ha che

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} f(v) = +\infty$$

(iii) f convessa

(iv) V riflessivo e V' separabile

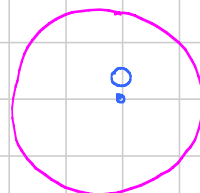
Allora esiste

$$\min \{ f(v) : v \in V \}.$$

Dim. Esiste $R > 0$ t.c.

$$\|v\|_V \geq R \Rightarrow f(v) \geq f(0)$$

$$f \geq f(0)$$



Se esiste min su $\overline{B}_V(0, R)$, allora quello è min. globale.
Ora f è SCI debole per tes. precedente e le palle sono debolmente compatte.

— o — o —

Achtung! Le ipotesi servono!!!

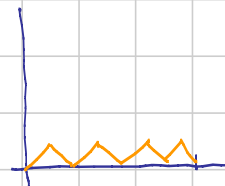
$$F(u) = \int_0^1 (u^2 + |u^2 - 1|) dx \quad u \in H_0^1 = V$$

Ora $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ è continuo forte e soddisfa il limite all'infinito.

L'inf di F è 0 e lo posso raggiungere come in figura.

D'altra parte il minimo non esiste.

— o — o —



Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 61

Note Title

09/12/2019

SPAZI DI BAIREProp. Sia X sp. topologico.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(1) Per ogni succ. $\{A_n\}$ di aperti vale l'implicazione

$$A_n \text{ denso } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ denso (in particolare } \neq \emptyset)$$

(2) Per ogni succ. $\{C_n\}$ di chiusi vale l'implicazione

$$\text{Int}(C_n) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \emptyset \quad (\text{in particolare } \neq X)$$

(3) Per ogni succ. $\{C_n\}$ di chiusi vale l'implicazione

$$\text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \text{Int}(C_n) \neq \emptyset$$

Dim(1) $\Leftrightarrow$ (2) Passare al complementare(2) $\Leftrightarrow$ (3) Contrappositive ($A \Rightarrow B$ è equiv. a $\text{not } B \Rightarrow \text{not } A$)Def. (Spazi di Baire) Uno sp. top. X si dice **spazio di BAIRE** se vale uno dei 3 equiv. statements della Prop (quindi tutti).Def. Un sottoinsieme A di uno sp. top. si dice

- NOWHERE DENSE se $\text{Int}(\text{Clos}(A)) = \emptyset$
- MAGRO se è unione numerabile di nowhere dense
- "Prima categoria"
- RESIDUALE se il complementare è magro
- di SECONDA CATEGORIA se non è di prima categoria.

Oss. Unione numerabile di MAGRI è magra.

Oss. In uno spazio di Baire i magri hanno parte interna vuota.

Idea brutale: $\rightarrow$ nowhere dense = piccolissimo topologicamente
 $\rightarrow$ magro = piccolo topologicamente

Utilizzo pratico: voglio dire che esiste $x \in X$ con una certa proprietà e per farlo dimostro che l'insieme degli x che non hanno la proprietà è magro. Se X è Baire è fitta.

Per dire che un insieme è magro lo scompago in nowhere dense.

Tutti gli spazi che rientrano in queste tipologie sono sp. di Baire:

- ① spazi metrici completi
- ② spazi loc. compatti Hausdorff
- ③ aperti in sp. di Baire (rispetto alla top. ristretta).

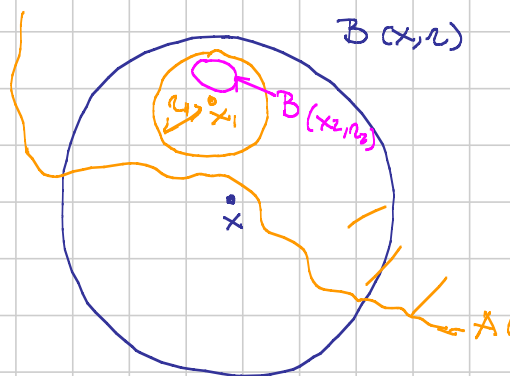
Teorema Se X è metrico completo, allora è spazio di Baire.

Dim. Siano A_n aperti densi. Dimostriamo che $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è denso.

Dato $x \in X$, serve che ogni $B(x, r)$ interseca l'intersezione.

L'idea è costruire induttivamente due succ. $\{x_n\} \subseteq X$
 e $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c.
 $r_n \rightarrow 0$

$$\bar{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x, r) \cap A_1$$



$$\overline{B}(x_{m+1}, r_{m+1}) \subseteq B(x_m, r_m) \cap A_{m+1}$$

La costruzione si può fare induttivamente:

- Passo base: esiste $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x, r) \cap A_1$ per densità di A_1
- Supponendo di essere arrivati al passo n , possiamo trovare

$$\overline{B}(x_{m+1}, r_{m+1}) \subseteq B(x_m, r_m) \cap A_{m+1} \text{ per densità di } A_{m+1}$$

e wlog possiamo assumere $r_{m+1} \leq \frac{1}{m+1}$ (così $r_m \rightarrow 0$).

Claim: $\{x_m\}$ è di Cauchy, quindi $x_m \rightarrow x_\infty$ e $x_\infty \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Fissato m , abbiamo che $x_m \in \overline{B}(x_m, r_m)$ per ogni $n \geq m$ e poiché i raggi tendono a 0 questo ci dice $\{x_m\}$ è di Cauchy. Inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$x_\infty \in \overline{B}(x_m, r_m) \subseteq A_m \quad \forall m$$

da cui la tesi.

— o — o —

Oss. La dim. nel caso di spazi loc. compatti è sostanzialmente analoga, nel senso che si definisce iterativamente una successione U_n con la proprietà che

$$\text{Clos}(U_{m+1}) \subseteq U_m \cap A_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

↑
compatta

L'elemento x cercato sta nell'intersezione degli U_n che è $\neq \emptyset$ [Sistemare i dettagli e vedere se e dove si usa Hausdorff].

Teorema Sia X sp. top. di Baire, e sia $Y \subseteq X$ un aperto. Allora Y è sp. di Baire.

Dim. (Si basa sulla top. ristretta, quindi *achtung a pesciolere*)

Mostriamo che inters. di aperti densi rimane densa.

Siano $\{A_n\}$ aperti densi in Y . Poniamo

$$\hat{A}_n := A_n \cup (X \setminus \text{clos}(Y))$$

Si osserva che $\{\hat{A}_n\}$ sono aperti densi in X (verificare per bene) quindi la loro intersezione è densa in X .

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup (X \setminus \text{clos}(Y))$$

Appiuché questa sia densa in X occorre che la prima intersezione sia densa in Y (dato $y \in Y$, c'è un suo intorno tutto contenuto in Y , e questo non può toccare la seconda parte).

Esercizio

- Provare a dim. che chiuso in Baire è Baire
- Riuscirà
- Trovare il controesempio, visto che è **falso**
- Capire cosa è successo ☺

Esempi

- $\mathbb{R}$ è spazio di Baire
- $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ sono sp. di Baire (metrici completi)
- Palla aperta in metrico completo è Baire
- " chiusa in " " " (è a sua volta metrico completo)
- $\mathbb{Q}$ non è sp. di Baire (con la top. che arriva da $\mathbb{R}$)
(è unione numerabile di p.ti, cioè chiusi con parte interna vuota)

BAIRE POINT 1 (Analisi 1)

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che per ogni $x > 0$ si abbia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = l \quad (\text{sempre lo stesso})$$

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$

Idea: QUALITATIVO VS QUANTITATIVO

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ definitiv.

Ipotesi: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x > 0 \quad |f(nx) - l| \leq \varepsilon$ definitiv.
 $\uparrow$ qualitativo

Rendiamo la cosa quantitativa. Definiamo

$$C_k := \{x > 0 : |f(nx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq k\}$$

L'unione dei C_k è tutto $(0, +\infty)$. Inoltre i C_k sono chiusi in $(0, +\infty)$ perché

$$C_k = \bigcap_{n \geq k} \underbrace{\{x > 0 : |f(nx) - l| \leq \varepsilon\}}_{\text{facilmente chiusi}}$$

Essendo $(0, +\infty)$ sp. di Baire, esiste $(a, b) \subseteq C_{k_0}$. Ma allora

$$|f(nx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall n \geq k_0$$

cioè

$$|f(y) - l| \leq \varepsilon \quad \forall y \in \bigcup_{n \geq k_0} (na, nb)$$

$\uparrow$ ricoprono tutta una semiretta

Iniziamo a ricoprire
quando

$$(n+1)a < nb$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ na \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ nb \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ (n+1)b \end{array} \right) \\ & (n+1)a & \end{array}$$

$a < n(b-a)$ e questa accade definitivamente.
— o — o —

Variante interessante : e se l può dipendere da x ?
— o — o —

Ist. Analisi Matematica

—

LEZIONE 62

Note Title

09/12/2019

BAIRE POINT 2 (Analisi 1)

Non esistono funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sono discontinue "solo" sugli irrazionali (mentre ne esistono che sono discontinue solo su $\mathbb{Q}$: ad esempio $\frac{1}{\text{denom.}}$ e o fuori di $\mathbb{Q}$)

Def. Un sottoinsieme di uno sp. top. si dice

- F_σ se è unione numerabile di chiusi
- G_δ se è intersezione numerabile di aperti

Prop. Siano X e Y due spazi metrici, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Allora l'insieme dei p.ti di discontinuità di f è un F_σ .

Dim. Moralmente: intorno ad un p.to di discontinuità f "oscilla" che è un discorso qualitativo.

Rendiamo quantitativa l'oscillazione. Poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$D_\varepsilon := \{x \in X : \forall \eta > 0 \exists (y, z) \in B_X(x, \eta)^2 \text{ dist}_Y(f(y), f(z)) \geq \varepsilon\}$$

Facile verifica: x è p.to di discontinuità $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.c. $x \in D_\varepsilon$

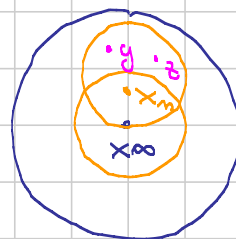
Inoltre tutti i D_ε sono chiusi. Supponiamo $\{x_n\} \subseteq D_\varepsilon$ e che $x_n \rightarrow x_\infty$. Claim: $x_\infty \in D_\varepsilon$.

Dato $\eta > 0$ trovo $x_n \in B_X(x_\infty, \frac{\eta}{2})$

Inoltre trovo y e z in $B_X(x_n, \frac{\eta}{2})$

con immagini a distanza $\geq \varepsilon$.

Questi stessi y e z stanno in $B_X(x_\infty, \eta)$.



Morale: essere p.to di discontinuità non passa al limite,
ma essere p.to di disc. ε -esima sì!!

Basta ora osservare che l'insieme di tutti i p.ti di discontinuità è

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}.$$


Sol. esercizio Analisi 1 Sia D l'insieme dei p.ti di discontinuità. Sappiamo che è un F_σ .

Vogliamo dim. che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NON è un F_σ .

Se lo fosse, avremmo

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

$\uparrow$ chiusi in $\mathbb{R}$

ma allora i C_n avrebbero parte interna $\emptyset$, ma allora

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

e quindi $\mathbb{R}$ sarebbe unione num. di chiusi con $\text{Int} = \emptyset$



BAIRE POINT 3 (Analisi 2)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ separatamente continua

($\forall y \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x, y)$ è continua
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad y \rightarrow f(x, y)$ è continua)

e nulla su un denso $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Allora $f \equiv 0$.

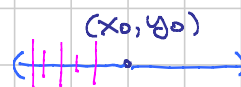
(Banale nel caso $D = \mathbb{Q}^2$, ma con dim. che non si ricicla)

Dim Supponiamo per assurdo sia falso. Allora esiste

$$f(x_0, y_0) = 4\delta > 0$$

$\uparrow$ wlog

Allora esiste $\eta_0 > 0$ t.c.



$$f(x, y_0) \geq 2\delta \quad \forall x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$$

Per ogni $x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$ esiste $\rho(x) > 0$ t.c.

$$f(x, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \rho(x), y_0 + \rho(x)]$$

Se il $\rho(x)$ avesse un minimo sindacale da qualche parte avremmo trovato un rettangolo in cui $f(x, y) \geq \delta$. Rendiamo il discorso quantitativo

$$C_k := \{x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0] : \rho(x) \geq \frac{1}{k}\}$$

È evidente che l'unione dei C_k è $[x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$. Se fossero chiusi per Baire almeno un C_{k_0} avrebbe parte interna, quindi contenebbe un intervallo.

Fissato k , sia $\{x_n\} \subseteq C_k$ con $x_n \rightarrow x_\infty$. Claim: $x_\infty \in C_k$

$$f(x_n, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k}]$$

$\downarrow$ ← continuità a y fisso

$$f(x_\infty, y) \geq \delta \quad \exists$$

— o — o —

Oss. Si poteva ottenere un ρ min. sindacale dimostrando che $x \rightarrow \rho(x)$ è sc.l.

Purtroppo in generale è solo semi-continua sup.

— o — o —

BAIRE POINT 4 (Analisi 3)

Teorema Sia H sp. di Hilbert, e sia $\{u_m\}$ una succ. debolmente convergente.

Allora $\{u_m\}$ è limitata.

Dim. Per ogni $v \in H$ si ha che

$$\langle u_m, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle$$

e quindi in particolare $\{\langle u_m, v \rangle\}$ è limitata.

Rendiamo quantitativo. Per ogni $k \geq 0$ reale poniamo

$$C_k := \{v \in H : |\langle u_m, v \rangle| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$$

L'unione dei C_k è tutto H per ipotesi. Inoltre sono chiusi perché
 $\uparrow$ qui basta k fisso

$$C_k = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{v \in H : |\langle u_m, v \rangle| \leq k\}$$

chiusi per cont. del prodotto scalare

Quindi almeno uno ha parte interna, cioè esiste

$$B(u_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

Claim: $B(0, 1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}}$. Infatti sia $w \in B(0, 1)$. Allora

$$w = \frac{1}{r_0} r_0 w = \frac{1}{r_0} \underbrace{(r_0 w + u_0)}_{\subseteq C_{k_0}} - \frac{1}{r_0} \underbrace{u_0}_{\subseteq C_{k_0}} \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}}$$

Basta fare il prodotto scalare $\langle w, u_m \rangle$

Finale: ora sappiamo che

$$|\langle u_m, w \rangle| \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \forall w \in B(0,1)$$

Usando $w := \frac{u_m}{\|u_m\|}$ otteniamo $\|u_m\| \leq \frac{2k_0}{n_0}$

(se $\|u_m\| = 0$ è ancora più facile).

Teorema Stessa cosa in un Banach (conv. deb. $\Rightarrow$ limitatezza)

Dim. Per ogni $f \in V'$ abbiamo che $\{f(u_m)\} \subseteq \mathbb{R}$ è limitata (converge a $f(u_\infty)$).

Poniamo

$$C_k := \{f \in V' : |f(u_m)| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{f \in V' : |f(u_m)| \leq k\}$$

chiusi in V'

L'unione dei C_k è tutto V' , dunque esiste

$$B_{V'}(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

Claim: $B_{V'}(0,1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{n_0}}$

Se dimostriamo il claim avremo che

$$|f(u_m)| \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall f \in B_{V'}(0,1)$$

e si chiude per caratt. duale della norma.

(Oss. Abbiamo usato Baire solo in V' , che è Banach in automatico, quindi V Banach non serve.)

Verifica del claim: se $f \in B_{V'}(0,1)$, allora

$$f(v_m) = \frac{1}{r_0} r_0 f(v_m) = \frac{1}{r_0} (r_0 f(v_m) + f_0(v_m)) - \frac{1}{r_0} f_0(v_m)$$

e con i valori assoluti

$$\begin{aligned} |f(v_m)| &\leq \frac{1}{r_0} |r_0 f(v_m) + f_0(v_m)| + \frac{1}{r_0} |f_0(v_m)| \\ &= \frac{1}{r_0} \underbrace{|(r_0 f + f_0)(v_m)|}_{\leq k_0} + \frac{1}{r_0} \underbrace{|f_0(v_m)|}_{k_0} \end{aligned}$$

perché f_0 e $f_0 + r_0 f$ stanno in $B_{V'}(f_0, r_0)$.

Esercizio: provare a farlo con le mani in un Hilbert separabile!!!

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 63

Note Title

10/12/2019

BAIRE POINT Non esistono sp. di Banach V con base algebraica numerabile

Dim. Supponiamo per assurdo che $\{v_n\}$ sia base algebrica. Poniamo

$$C_k := \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

È ovvio che la loro unione è tutto V . Se fossero chiusi (e lo sono) almeno uno dovrebbe avere $\text{Int} \neq \emptyset$ il che è impossibile, perché se C_k avesse interno $\neq \emptyset$ dovrebbe contenere un intorno dell'origine (è un s.sp. vett.) e quindi dovrebbe contenere εv_{k+1} per ε piccolo.

Lemma Sia V uno sp. normato, e sia W un s.sp. vett. di dim. finita. Allora W è chiuso.

Dim 1 Siano $\{v_n\} \subseteq W$ con $v_n \rightarrow v_\infty$. Vogliamo che $v_\infty \in W$. Prendiamo una base $\{w_1, \dots, w_k\}$ di W .

Su W possiamo mettere 2 norme:

- quella ereditata da V
- quella che deriva dall'identificazione con $\mathbb{R}^k$

$$\|\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k\| := \{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2\}^{1/2}$$

Cauchy (vedi Analisi 2): in dim. finita tutte le norme sono equivalenti. Per hp $\{v_n\}$ è di Cauchy rispetto alla prima norma (perché converge), quindi è di Cauchy rispetto alla seconda norma, ma risp. alla 2ª norma W è completo, quindi v_n converge ad un el. di W risp. alla 2ª norma, quindi anche rispetto alla 1ª. !!!

Dim 2 Scriviamo

$$v_m = \alpha_m^1 w_1 + \dots + \alpha_m^k w_k$$

Vorremmo tanto che i coeff. passassero al limite, per lo meno come sottosucc.

Questo è gratis se i coeff. sono limitati. Supponiamo per assurdo che non lo siano. A meno di s.succ. (non vero = minale) possiamo assumere che α_m^1 sia sempre il più grande in valore assoluto e che wlog $\alpha_m^1 \rightarrow +\infty$. Ora

$$\frac{1}{\alpha_m^1} v_m = w_1 + \frac{\alpha_m^2}{\alpha_m^1} w_2 + \dots + \frac{\alpha_m^k}{\alpha_m^1} w_k$$

$\downarrow$ (v_m limitati e $\alpha_m^1 \rightarrow +\infty$) $\swarrow$ sono tutti limitati, quindi a meno di s.succ. hanno limite

Ma allora al limite abbiamo

$$0 = w_1 + 0 w_2 + \dots + 0 w_k$$

e questo va contro l'essere una base.

Oss. Non esiste nessuna norma che renda $\mathbb{R}[x]$, cioè lo sp. dei polinomi, un Banach.

Dim. : ha base algebrica numerabile

$$\text{Ora } \left\{ \int_4^{27} |p(x)|^{32} dx \right\}^{1/32} \text{ è una norma su } \mathbb{R}[x]$$

Domanda: chi è il suo completamento?

BAIRE POINT (Analisi 1)

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in nessun punto.

Azi: ne esistono tantissime!

Def. Poniamo $V =$ insieme delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue e limitate

Analisi 2: V è completo rispetto alla norma del sup.

Claim: gli elementi di V che sono derivabili in un p.to a loro scelta sono un magro.

Produiamo il discorso quantitativo

$$C_k := \left\{ f \in V : \exists x \in [-k, k], \forall h \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \right. \\ \left. |f(x+h) - f(x)| \leq k|h| \right\}$$

Brutalmente: stiamo chiedendo rapp. increment. $\leq k$ per tutti gli h abbastanza vicini a 0.

Se $f \in V$ è derivabile in almeno un p.to x_0 , allora $f \in C_k$ per un qualche k . Infatti

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

e quindi per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq 2|f'(x_0)| \quad \forall h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$$

Ma allora $f \in C_k$ per di prendere

$$k \geq |x_0|, \quad k \geq 2|f'(x_0)|, \quad \frac{1}{k} \leq \delta.$$

Secondo punto: i C_k sono chiusi.

Supponiamo $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente, e $f_n \in C_k$ per un certo k fisso. Siano x_n i corrispondenti punti nella def. di C_k . Allora a meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ (perché $x_n \in [-k, k]$). Per ogni n accade che

$$|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)| \leq k |h| \quad \forall h \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$$

$\downarrow$ (doppio scambio
conv. unif.)

$$|f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_\infty)| \leq k |h| \quad \ll$$

Quindi $f_\infty \in C_k$.

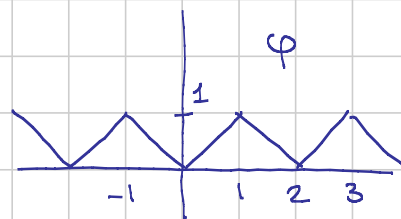
Terzo p.to: ogni C_k ha parte interna $\emptyset$.

Supponiamo $B_\nu(f_0, \varepsilon_0) \subseteq C_{k_0}$.

A meno di cambiare ε_0 con $\frac{\varepsilon_0}{2}$, posso supporre wlog che f_0 sia molto regolare, ad esempio Lipschitz con costante L . (Basta fare conclusioni di f_0).

Consideriamo la funzione φ come in figura

Poniamo



$$f_n(x) := f_0 + \frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$$

Valgono 2 fatti: $f_n \rightarrow f_0$ unif.

$\frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$ è Lip. con costante esattamente n in ogni sottointervallo

Quindi $f_n \in B(f_0, \varepsilon_0)$ definitivamente, quindi dovrebbe stare in C_{k_0} , ma allora dovrebbe essere che verifica

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leq k_0 \quad \forall |h| \leq \frac{1}{k_0}$$

per un dato x , ma questo è impossibile per colpa di $\frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$.

$$\frac{1}{n} \varphi(n^2 x) = f_n(x) - f_0(x)$$

$$\left| \frac{1}{n} \varphi(n^2(x+R)) - \frac{1}{n} \varphi(n^2 x) \right| \leq |f_n(x+R) - f_n(x)| + |f_0(x+R) - f_0(x)|$$

$$\leq k_0 |R| + L |R|$$

$$= (k_0 + L) |R|$$

Ma anche a $5x$ può essere grande a piacere.

BAIRE POINT (Analisi 3)

Teorema di BANACH-STEINHAUS

Versione equivalente. Sia V sp. di Banach, sia W sp. normato, sia I insieme di indici.

Per ogni $i \in I$ sia $L_i : V \rightarrow W$ lineare e continua

Allora sono fatti equivalenti

(1) Limitazione qualitativa

$$\forall v \in V \quad \sup_{i \in I} \|L_i v\|_W < +\infty$$

(2) Limitazione quantitativa

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall v \in V \quad \|L_i v\|_W \leq M \|v\|_V$$

$$\text{o equivalentemente } \sup_{i \in I} \|L_i\|_{\mathcal{L}(V, W)} < +\infty$$

BS (con versione alternativa) Siano $L_i : V \rightarrow W$ come sopra.

Allora vale una ed una sola delle seguenti alternative

(1) Limitazione quantitativa come sopra

(2) Esiste un G_δ denso $A \subseteq V$ tale che

$$\forall v \in A \quad \sup_{i \in \mathbb{I}} \|L_i v\|_W = +\infty$$

Corollario Siano $L_n : V \rightarrow W$ una succ. di operatori lineari e continui.

Supponiamo che

$$L_n(v) \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in V$$

(convergenza puntuale)

Allora vale la limitazione quantitativa, dunque gli L_n sono equi-lip., dunque L_∞ è lineare e continuo.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 64

Note Title

10/12/2019

Dimostrazione di BS, versione equivalente (ii) $\Rightarrow$ (i) è ovvio

(i) $\Rightarrow$ (ii) Per ipotesi $\sup_{i \in I} \|L_i v\|_W < +\infty \quad \forall v \in V$

Poniamo

$$C_k := \{v \in V : \|L_i v\|_W \leq k \quad \forall i \in I\}$$

$$= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\{v \in V : \|L_i v\|_W \leq k\}}_{\text{chiusi in } V \text{ per continuit  di } L_i \text{ e di } \|\cdot\|_W}$$

Per ipotesi V   il unione dei C_k . Ma allora almeno uno ha Int $\neq \emptyset$, cio  esiste

$$\overline{B}_V(v_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

$$\text{Claim: } \overline{B}_V(0, 1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}}$$

Infatti sia $v \in \overline{B}_V(0, 1)$. Allora

$$v = \frac{1}{r_0} r_0 v = \frac{1}{r_0} (r_0 v + v_0) - \frac{1}{r_0} v_0$$

da cui

$$\|L_i v\|_W \leq \frac{1}{r_0} \underbrace{\|L_i (r_0 v + v_0)\|_W}_{\leq k_0} + \frac{1}{r_0} \underbrace{\|L_i v_0\|_W}_{\leq k_0}$$

perch  $v_0 + r_0 v$ e v_0 stanno in $\overline{B}_V(v_0, r_0)$.

Dal claim segue la conclusione perché

$$\|Li v\|_W \leq \frac{2k_0}{r_0} \quad \forall v \in V \text{ con } \|v\|_V \leq 1$$

e ora basta fare il sup per controllare la norma come operatore.

— o — o —

Dim. BS, versione alternativa Supponiamo che non valga la (2).
La (2) dice che l'insieme in cui

$$\sup_{i \in I} \|Li v\| < +\infty$$

è magro. Allora l'insieme non è magro e quindi non può essere l'unione dei C_k se questi hanno parte interna $\emptyset$.
Quindi esiste C_{k_0} con $\text{Int} \neq \emptyset$ ed è la dim. di prima.

— o — o —

BAIRE POINT Non convergenza puntuale di serie di Fourier.

Versione light Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica
la cui serie di Fourier non converge puntualmente
in $x=0$.

Versione strong Sia V lo sp. delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
continue e 2π -periodiche. Questo è Banach
rispetto alla norma del sup.

Allora esiste $\mathcal{Y} \subseteq V$ che è un G_δ denso tale che per ogni
 $f \in \mathcal{Y}$ la serie di Fourier di f non converge puntualmente
in un G_δ denso di punti (dipendente dalla funzione).

Dirichlet L'idea è di considerare le somme parziali

$$S_m^f(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos(kx) + \sum_{k=0}^m b_k \sin(kx)$$

e vederle come operatori lineari dopo averle calcolate per $x=0$

$$S_m: V \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{è la somma degli } a_k)$$

Se la serie di F di f converge puntualmente in $x=0$, allora $S_m^f(0)$ è una successione limitata.

Se convergesse sempre puntualmente, avremmo limit. qualitativa, dunque per BS una limitazione quantitativa.

Questo vorrebbe dire che gli S_m sono limitati come operatori (in norma operatoriale).

$$S_m^f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_m(t-x) dt$$

dove D_m è il NUCLEO DI DIRICHLET

$$D_m(t) := \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \quad (\text{vedi lezioni anno scorso})$$

e quindi

$$S_m^f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_m(t) dt$$

Devo trovare la norma di questo operatore

$$|S_m^f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^\infty} \cdot \|D_m\|_{L^1}$$

$$\text{Claim: } \|S_m(0)\|_{\mathcal{L}(V, \mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|D_m\|_{L^1}$$

Fatto generale $L: L^\infty((a,b)) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(f) = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

allora $\|L\|_{(L^\infty)'} = \|g\|_{L^1}$

In questo caso usiamo $f = \text{sign}(g)$. Lo stesso vale se ci riduciamo alle f continue perché basta approx $\text{sign}(g(x))$ con funzioni continue e osservare che

$$\int_a^b f_n(t) g(t) dt \rightarrow \int_a^b \text{sign}(g(x)) \cdot g(x) dx$$

per conv. puntuale dominata.

Per concludere basta dimostrare che $\|D_n\|_{L^1} \rightarrow +\infty$ e questo è esercizio di analisi 1:

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{|\sin \frac{t}{2}|} dt \geq \underset{\substack{\uparrow \\ |\sin \frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}}}{} 2 \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt$$

Poniamo $y = (n+\frac{1}{2})t$ da cui $dy = (n+\frac{1}{2}) dt$

$$= 2 \int_0^{2\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin y|}{y} \cancel{(n+\frac{1}{2})} \frac{1}{\cancel{(n+\frac{1}{2})}} dy$$

$$\rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy = +\infty$$

— 0 — 0 —

Din Stroug Abbiamo dim. in realtà che esiste un G_δ denso di funzioni per cui la serie NON converge in $x=0$.

Allo stesso modo trovo un G_δ denso per cui la serie di F non converge in un razionale q a scelta.

Se li interseco tutti ottengo un G_δ denso in cui la serie di F non converge in ogni $q \in \mathbb{Q}$.

Può convergere negli altri p.ti? NO! Poniamo

$$S^f(x) := \sup \{ |S_m^f(x)| : m \in \mathbb{N} \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Sappiamo che $S^f(x) = +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ se f sta nel G_δ denso di funzioni.

Ora $S^f(x)$, come funzione di x , è sup di funzioni continue quindi è SCI.

Fatto generale: l'insieme dei p.ti $x \in \mathbb{R}$ in cui una funzione SCI vale $+\infty$ è un G_δ in $\mathbb{R}$.

$$\{x \in \mathbb{R} : S^f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : S^f(x) > n\}$$

e questi sono tutti aperti !!!

Quindi, fissata f nel G_δ di funzioni, la sua serie di F non converge in un G_δ denso di x !!!

— o — o —

Idea per una dim. con le mani di BS

Supponiamo $\|L_i\|$ non limitati in norma. Allora esiste $\{i_m\} \subseteq I$ t.c.

$$\|L_{i_m}\|_{\mathcal{L}(V,W)} \geq 20^m$$

Inoltre esiste $\{v_m\} \subseteq V$ tali che

$$\|v_m\|_V = 1 \quad \text{e} \quad \|L_{i_m}(v_m)\|_W \geq \frac{1}{2} \|L_{i_m}\|_{\mathcal{L}(V,W)}$$

(quasi allineati)

Per ogni $\{\sigma_m\} \subseteq \{-1, +1\}$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{10^k} v_k$$

converge (converge assolutamente).

Claim: scegliendo bene i σ_m , la somma della serie è un vettore v tale che

$$\|L_{i_m}(v)\|_W \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^m} \|L_{i_m}\|_{\mathcal{L}(V,W)}$$

↓
divergono almeno come 20^m

[Per maggiori dettagli BLOG DI TERENCE TAO alla voce BAIRE]

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 65

Note Title

12/12/2019

BAIRE POINT

TEOREMA DELLA MAPPA APERTA (e dintorni)

Setting: siano V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Dato $w \in W$, vogliamo risolvere l'eq.

$$f(v) = w$$

Def. Nel setting di sopra, definiamo

- solver qualitativo una funzione $S: W \rightarrow V$ tale che

$$f(S(w)) = w \quad \forall w \in W$$

- solver quantitativo una funzione $S: W \rightarrow V$ tale che

$$f(S(w)) = w \quad \forall w \in W$$

e

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \|S(w)\|_V \leq M \|w\|_W \quad \forall w \in W.$$

Domande:

- ① Esistono solver qualitativi ?
 - ② " " " lineari ?
 - ③ Esistono solver quantitativi ?
 - ④ " " " lineari ? (in questo caso è automaticamente continuo)
- o — o —

Risposta ① Siano X e Y insiemi, e sia $f: X \rightarrow Y$

Allora sono equiv:

(i) esiste solver qualitativo

(ii) f surgettiva

Dim. 1ª settimana 1º anno (S è un' inversa destra)
(senza un po' di scelta)

Risposta ② Siano V e W sp. vett., e sia $f: V \rightarrow W$ lineare

Allora sono equiv:

(i) esiste solver qualitativo lineare

(ii) f surgettiva

Dim. Geometria 4 + C.A.

Sia $\{w_i\}_{i \in I}$ base algebrica di W . Per ogni $i \in I$ scegliamo $v_i \in V$ t.c. $f(v_i) = w_i$. Poniamo

$$S(w_i) := v_i \quad \forall i \in I,$$

estendiamo per linearità e verifichiamo che funziona!

Prop. (Caratterizzazione solver quantitativi)

(non serve cont.)

Siano V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Allora sono equivalenti:

(i) esiste solver quantitativo (non nec. lineare)

(ii) f è aperta (cioè $f(\text{aperto di } V) = \text{aperto di } W)$

(iii) esiste $R > 0$ t.c. $f(B_V(0, R)) \supseteq B_W(0, 1)$.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (iii) Facile con $R = M$ (costante del solver)

Dato $w \in W$ con $\|w\|_W < 1$, sappiamo che

$\|S(w)\|_V \leq M \|w\|_W < M$ e verifica $f(S(w)) = w$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Dato $w \in W$ poniamo $S(w) = 0$ se $w = 0$.
Altrimenti consideriamo

$$z := \frac{w}{2\|w\|_W} \in B_W(0,1)$$

Allora esiste $x \in B_V(0,R)$ t.c. $f(x) = z$. Poniamo

$$S(w) := 2\|w\|_W \cdot x$$

Facciamo le due verifiche

$$f(S(w)) = 2\|w\|_W f(x) = 2\|w\|_W \cdot z = w \quad \text{☺}$$

$$\|S(w)\|_V = 2\|w\|_W \cdot \|x\|_V \leq \underbrace{2R}_M \|w\|_W \quad \text{☺}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) $f(B_V(0,1))$ è aperto, quindi contiene $B_W(0,r_0)$

Per linearità $f(B_V(0, \underbrace{\frac{1}{R}}_R)) \supseteq B_W(0,1)$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Dobbiamo dim. che $f(B_V(v_0, r_0))$ è aperto in W , quindi contiene una palla centrata in $f(v_0)$. Basta traslare il problema nell'origine e usare la linearità:

$$f(B_V(v_0, r_0)) = f(v_0 + r_0 B_V(0,1))$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{\uparrow} = f(v_0) + r_0 f(B_V(0,1))$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} f(v_0) + \frac{r_0}{R} f(B_V(0,R))$$

$$\stackrel{\uparrow (iii)}{\geq} f(v_0) + \frac{r_0}{R} B_W(0,1) = B_W(f(v_0), \frac{r_0}{R})$$

— 0 — 0 —

Teorema della mappa aperta (Risposta ③)

Siano V e W spazi di Banach

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare e continua

Allora sono equivalenti

- (i) f è surgettiva (cioè esiste solver qualitativo)
- (ii) f è aperta (cioè esiste solver quantitativo)

Prop. (Solver quantitativo su un denso = fa il lavoro sporco)

Sia V sp. di Banach (solo in partenza)

Sia W sp. normato.

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare e continua.

Allora sono equivalenti:

- (i) esiste solver quantitativo (cioè f è aperta)
- (ii) " " " su un denso, cioè esiste $D \subseteq W$ denso, ed esiste $\hat{S}: D \rightarrow V$ tale che

$$f(\hat{S}(w)) = w \quad \forall w \in D$$

$$\exists \hat{M} \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \|\hat{S}(w)\|_V \leq \hat{M} \|w\|_W \quad \forall w \in D$$

- (iii) esiste $R > 0$ t.c. $\text{Clos}(f(B_V(0, R))) \supseteq B_W(0, 1)$
- o — $\uparrow \uparrow \uparrow$ — o —

Dim (Teo. mappa aperta, dato lavoro sporco) (ii) $\Rightarrow$ (i) ovvio

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ipotesi: f surgettiva Tesi: una qualunque delle 3 equiv. della prop. prec.

$$C_k := \text{Clos}(f(B_V(0, k)))$$

Sono chiusi e la loro unione è W se f è surgettiva
(questo anche senza chiusure)

Essendo W Banach, almeno uno ha parte interna, cioè

$$\exists B_W(v_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

$$\text{Claim: } B_W(0,1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}} = \text{Clos} \left(f \left(B_V \left(0, \frac{2k_0}{r_0} \right) \right) \right)$$

Sia $w \in B_W(0,1)$. Allora

$$w = \frac{1}{r_0} r_0 w = \frac{1}{r_0} \underbrace{(r_0 w + v_0)}_{\in C_{k_0}} - \frac{1}{r_0} \underbrace{v_0}_{\in C_{k_0}}$$

$$\in C_{\frac{2k_0}{r_0}}$$

Ho usato 2 fatti generali:

- se $a \in \text{Clos} \left(f(B_V(0, k_0)) \right) \Rightarrow \lambda a \in \text{Clos} \left(f(B_V(0, \lambda k_0)) \right)$
 - se $a \in \text{Clos} \left(f(A) \right)$ e $b \in \text{Clos} \left(f(B) \right)$
- $$\Rightarrow a+b \in \text{Clos} \left(f(A+B) \right).$$

Per la prop. prec. questo basta.

Corollario 1 Siano V e W sp. di Banach, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare, continua e invertibile.
Allora f^{-1} è continua.

Dim. Essere f aperta è equiv. alla continuità dell'inversa, posto che esista.

(Continuità dell'inversa)

Corollario 2 (Equivalenza di norme.)

Sia V sp. vettoriale. Siano $v \rightarrow \|v\|_1$ e $v \rightarrow \|v\|_2$ due norme che rendono V un Banach.

Supponiamo che esista $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|v\|_2 \leq M \|v\|_1 \quad \forall v \in V.$$

Allora esiste $R \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|v\|_1 \leq R \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

(quindi le 2 norme sono equiv.)

Dim. $\text{Id}: V \rightarrow V$ è lineare, continua dalla norma 1 alla norma 2 e invertibile.

Quindi l'inversa è continua (dalla norma 2 a quella 1), quindi lip, ...

Corollario 3 (Teorema del grafico chiuso)

Siano V e W sp. di Banach, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Allora sono equiv.:

(i) f è continua

(ii) il grafico di f è chiuso nel prodotto.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvio (nemmeno serve lineare)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Consideriamo 2 norme in V

$$\|v\|_1 := \|v\|_V, \quad \|v\|_2 := \|v\|_V + \|f(v)\|_W$$

Facile verifica: entrambe sono norme e $\|v\|_1 \leq \|v\|_2$.

Se dimostriamo che V è Banach rispetto alla seconda, allora abbiamo finito, perché esiste R b.c.

$$\|v\|_2 \leq R \|v\|_1 \quad \forall v \in V$$

e questo è la lip. di f .

Sia $\{v_m\}$ di Cauchy rispetto alla norma 2. Allora

$$\{v_m\} \text{ è di C. in } V \Rightarrow v_m \rightarrow v_\infty \text{ in } V$$

$$\{f(v_m)\} \text{ è di C. in } W \Rightarrow f(v_m) \rightarrow w_\infty \text{ in } W$$

Essendo per ipotesi il grafico chiuso per forza $w_\infty = f(v_\infty)$ e quindi

$$v_m \rightarrow v_\infty \text{ nel senso della norma 2}$$

quindi V è completo risp. alla norma 2.

Achtung! Per funzioni non lineari
grafico chiusi $\not\Rightarrow$ continua
(pensare alla differenza)

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 66

Note Title

12/12/2019

Dim. Lavoro sporco, parti facili(i) $\Rightarrow$ (ii) ovvio

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Per ipotesi $D \cap B_W(0,1)$ è immagine di $B_V(0, \hat{M})$
 costante del solver
 quantitativo in D

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Consideriamo come D l'immagine di f che è densa per l'ipotesi (iii). Ora si ripete la dimostrazione nel caso senza la chiusura.

$w \in \text{immagine} \leadsto z := \frac{w}{2\|w\|_W} \in B_W(0,1) \cap \text{Im} f$

$\leadsto z = f(x)$ con $x \in B_V(0,R) \leadsto \hat{S}(y) : 2\|w\|_W x \dots$

Finora non abbiamo usato Banach in partenza.

Dim. Lavoro sporco (ii) $\Rightarrow$ (i) SBAGLIATA

Per ipotesi esiste solver quantitativo in $D \subseteq W$.

Dato $w \in W$ qualunque, lo approssimo con $w_n \rightarrow w$
 $\uparrow_D$

Per ogni n esiste $v_n \in V$ con $f(v_n) = w_n$ e
 $\|v_n\|_V \leq \hat{M} \|w_n\|_W$

Spero che $v_n \rightarrow v$ e pongo $S(w) = v$ e per continuità di f deduco che $S(w)$ è il solver cercato.

$$\|v_n - v_m\|_V = \|S(w_n) - S(w_m)\|_V = \|S(w_n - w_m)\|_V \leq \hat{M} \|w_n - w_m\|_W$$

NO: S non è
 nec. lineare !!

NO: $w_n - w_m$ non
 è detto che $\in D$.

Lemma Sia W sp. normato, sia $D \subseteq W$ un denso.
Allora per ogni $w \in W$ esiste $\{w_n\} \subseteq D$ tale

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_W \leq 2 \|w\|_W$$

Dim. Costruiamo i w_n induttivamente.

- Scegliamo w_1 t.c. $\|w - w_1\| \leq \frac{1}{8} \|w\|$
- Scegliamo w_2 t.c. $\|(w - w_1) - w_2\| \leq \frac{1}{16} \|w\|$
- ⋮
- Supponendo di aver scelto $w_1, \dots, w_n$, scegliamo w_{n+1} tale che

$$\left\| \left(w - \sum_{k=1}^n w_k \right) - w_{n+1} \right\| \leq \frac{1}{2^{n+3}} \|w\|$$

Per costruzione è evidente che la serie dei w_n converge a w .
Devo stimare le norme

$$\|w_1\| \leq \|w\| + \|w - w_1\| \leq \|w\| + \frac{1}{8} \|w\| \leq \|w\| + \frac{1}{2} \|w\|$$

$$\|w_2\| \leq \|(w - w_1)\| + \|(w - w_1) - w_2\|$$

$$\leq \frac{1}{8} \|w\| + \frac{1}{16} \|w\| \leq \frac{1}{4} \|w\|$$

In generale

$$\|w_n\| \leq \|(w - w_1 - \dots - w_{n-1})\| + \|(w - \dots) - w_n\|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \|w\| + \frac{1}{2^{n+2}} \|w\| \leq \frac{1}{2^n} \|w\|$$

Conclusione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| \leq \|w\| + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|w\|}_{\|w\|} = 2\|w\|.$$

Oss. Con più risparmio si arrivava a $\sum \|w_n\| \leq (1+\varepsilon)\|w\|$.

Dim. lavoro sporco (ii) $\Rightarrow$ (i)

Dato $w \in W$ qualunque, considero $\{w_n\} \subseteq D$ come nel Lemma.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sappiamo che esiste $v_n \in V$ t.c.

$$f(v_n) = w_n \quad \text{e} \quad \|v_n\|_V \leq \hat{M} \|w_n\|_W$$

Claim $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge a $v \in V$ e possiamo porre $S(w) := v$.

Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_V \leq \underbrace{\hat{M}}_{\text{stima}} \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_W \leq 2 \underbrace{\hat{M}}_{\text{Lemma}} \|w\|_W$$

Questo dice che v è ben definito e $\|v\|_V \leq 2\hat{M}\|w\|_W$
(qui abbiamo usato che V è Banach)

Resta da dimostrare che $f(v) = w$, ma questo segue dalla linearità e dalla continuità di f

$$f(v) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = w$$

vero per le somme parziali e
poi si passa al limite.

Teorema Sia H sp. di Hilbert, sia W sp. di Banach,
 sia $f: H \rightarrow W$ lineare, continua e surgettiva.
 Allora esiste solver quantitativo lineare.

Dim Sia $K := \ker(f)$, che è un s.sp. chiuso.
 Per le solite storie

$$H = K \oplus K^\perp$$

↑ ortogonale, a sua volta s.sp. chiuso

Per restrizione consideriamo

$$\hat{f}: K^\perp \rightarrow W$$

Questa funzione è lineare, continua, iniettiva e surgettiva.

Dato $w \in W$ esiste $v \in H$ t.c. $f(v) = w$. Scrivo

$$v = \underbrace{v_1}_K + \underbrace{v_2}_{K^\perp} \quad \text{e osservo che} \quad w = f(v) = \underbrace{f(v_1)}_0 + f(v_2) = f(v_2)$$

Infine $K^\perp$ è almeno un Banach.

Quindi $\hat{f}$ è lineare e invertibile tra due Banach, quindi ammette un'inversa che è lineare e continua.

Questo è il solver cercato.

Oss. La stessa dimostrazione funziona in un Banach V se vale il seguente enunciato:

"per ogni sottospazio chiuso $K \subseteq V$ esiste s.sp. chiuso $M \subseteq V$ tale che

così è [↑]autom.
un Banach

$$V = K \oplus M$$

Un tale M si dice "supplementare topologico".

Fatto misterioso (purtroppo vero) : la proprietà di sopra vale in V se e solo se la norma in V è equivalente ad una norma che lo rende un Hilbert.

Ancora peggio : esistono V e W Banach ed esistono $f: V \rightarrow W$ lineari e continue e surgettive per cui

- esiste un solver qualitativo lineare (geom. 1)
- esiste un solver quantitativo (mappa aperta)
- NON esiste un solver quantitativo lineare.

(il loro ker non ha supplementare topologico)

— o — o —

Prossima puntata : il limite puntuale di funzioni continue non è detto che sia continuo.

Quanto può essere discontinuo ?

Risposta : poco ! È comunque continuo in un G_δ denso.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 67

Note Title

16/12/2019

BAIRE POINT Limite puntuale di funzioni continue

Teorema Sia X sp. metrico completo (ma forse basta sp. di Baire)
 sia Y sp. metrico. Siano $f_n: X \rightarrow Y$ e $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$,(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente.

Allora l'insieme dei p.ti di disc. di f_∞ è un F_σ magro (e quindi f_∞ è continua su un G_δ denso)

Dim. L'insieme dei p.ti di disc. è F_σ per un fatto generale, essendo unione numerabile di chiusi del tipo

$$D_\varepsilon := \{x \in X : \forall r > 0 \exists (y, z) \in B_X(x, r)^2 \text{ t.c. } d_Y(f(y), f(z)) \geq \varepsilon\}$$

Resta da dim. che questi hanno Int = $\emptyset$.

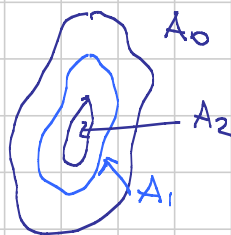
Supponiamo per assurdo che non sia vero, cioè esiste

$$A_0 \subseteq D_{\varepsilon_0}$$

↑ aperto di X .

Ora A_0 è uno sp. di Baire, essendo X uno sp. di Baire.

In A_0 rendiamo quantitativa la conv. puntuale, anzi l'essere di Cauchy. Poniamo



$$C_k := \{x \in A_0 : \text{dist}_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{k} \varepsilon_0 \quad \forall n \geq k, \forall m \geq k\}$$

$$= \bigcap_{m, n \geq k} \underbrace{\left\{x \in A_0 : \text{dist}_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{k} \varepsilon_0\right\}}_{\text{chiusi perché controimm. di chiuso}}$$

Osservazioni:

- l'unione dei C_k è tutto A_0 per conv. puntuale
- vale

$$\text{dist}_Y(f_n(x), f_0(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall n \geq k, \forall x \in C_k$$

(maando $n \rightarrow +\infty$ nella prec.)

Per Baire esiste

$$A_1 \subseteq C_{k_0}$$

↑ aperto in A_0 , quindi anche in X .

Osserviamo che $f_{k_0}(x)$ è continua, quindi esiste $A_2 \subseteq A_1$ tale che

$$\text{dist}_Y(f_{k_0}(y), f_{k_0}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall y \in A_2 \quad \forall z \in A_2$$

Ora per ogni y e z in A_2 vale

$$\begin{aligned} \text{dist}_Y(f_0(y), f_0(z)) &\leq \text{dist}_Y(f_0(y), f_{k_0}(y)) && \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \\ &+ \text{dist}_Y(f_{k_0}(y), f_{k_0}(z)) && \quad " \\ &+ \text{dist}_Y(f_{k_0}(z), f_0(z)) && \quad " \\ &\leq \frac{3}{4} \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Questo è un assurdo perché in ogni pallina contenuta in A_2 devono esserci due p.ti con immagine a distanza $\geq \varepsilon_0$ (siamo in D_{ε_0}).

— o — o —

Corollario Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile ovunque, allora $f'(x)$ è continua in un G_δ -denso.

Dim vale in senso puntuale

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

— o — o —

↑ succ. di funzioni continue.

OPERATORI NON LIMITATI

Def. (Operatore non limitato)

Sia V sp. normato, sia W sp. normato.

Un operatore (lineare) non limitato è un'applic. lineare

$$A : D(A) \rightarrow W$$

↑ "dominio di A " = s.sp. vettoriale di V

Moralmente: è un'applic. lineare definita solo su un s.sp.

Achtung! "Non limitato" si deve intendere come "non necessariamente limitato".

Ad esempio

- un operatore limitato (definito ovunque e continuo, quindi con norma operatoriale finita) è un operatore non limitato.
- L'operatore nullo definito solo su un s.sp. proprio è un operatore non limitato con il suo dominio $\neq V$.

Def. (Operatore di moltiplicazione su Hilbert separabile)

Sia H uno sp. di Hilbert. Un operatore non limitato

$$A : D(A) \rightarrow H$$

si dice operatore di moltiplicazione se esiste $\{e_n\}$ base ortonormale, ed esiste $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$A e_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Brutalmente: è l'analogo in dim. infinita della matrice diagonale)

$$D(A) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u_n e_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{dominio max} \\ \text{in cui ha senso} \\ \text{fare } A.}} : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{cond. che garantisce la} \\ \text{conv. di } \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n e_n}} < +\infty \right\}$$

Oss. L'operatore A risulta definitibile ovunque se $\{\lambda_n\}$ è una succ. limitata.

Def. Un operatore non limitato si dice

- chiuso se ha grafico chiuso, cioè vale l'implicazione

$$\begin{array}{l} \{x_n\} \subseteq D(A) \\ x_n \rightarrow x_\infty \\ Ax_n \rightarrow y_\infty \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} x_\infty \in D(A) \\ Ax_\infty = y_\infty \end{array}$$

(è meno della continuità perché si assume $Ax_n \rightarrow y_\infty$)

- massimale se non esiste un operatore chiuso che lo estende propriamente.

— o — o —

Oss. Gli operatori di moltiplicazione sono SIMMETRICI, nel senso che

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall (v, w) \in [D(A)]^2$$

[Discorsi nel video sul significato di compatto]

Esempio più classico

Sia H sp. di Hilbert separabile. Sia $A : H \rightarrow H$ lineare, simmetrico e compatto (come nel teo. spettrale).

Supponiamo in aggiunta che A sia iniettivo (quindi o non è autorale)

Allora l'invesso di A (definito solo sull'immagine) è un operatore di moltiplicazione e i suoi autorali sono i reciproci di quelli di A .

— o — o —

Potenza di un operatore Sia $A: D(A) \rightarrow H$ un operatore di moltiplicazione.

Supponiamo che tutti i λ_n siano > 0 .

Allora per ogni $s \in \mathbb{R}$ possiamo definire la potenza s -esima di A come l'operatore

$$A^s: D(A^s) \rightarrow H$$

definito da

$$A^s e_n := \lambda_n^s e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con dominio $D(A^s) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n e_n : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2s} \mu_n^2 < +\infty \right\}$

- Oss.
- Se s è intero positivo, i λ_n possono essere qualunque
 - Se $s \in \mathbb{Z}$ basta $\lambda_n \neq 0$
 - Se $s > 0$ basta $\lambda_n \geq 0$
 - Data una qualunque $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire $f(A)$ ponendo

$$f(A) e_n = f(\lambda_n) e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ovviamente con un suo dominio.

In questo modo **prodotto** di funzioni diventa composizione di operatori!!! [Corretto dopo video]

La definizione è coerente con quella ottenuta "sostituendo A nello sviluppo di Taylor di f ".

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 68

Note Title

16/12/2019

L'ESEMPIO DEGLI ESEMPI DEGLI ESEMPI

DIRICHLET LAPLACIAN (Per ora in dimensione 1)

Consideriamo $H: L^2((0, \pi))$. Consideriamo l'operatore

$$I: H \rightarrow H$$

che consiste nel fare due volte la primitiva con DBC.
In altre parole, ad ogni $f \in L^2((0, \pi))$ associamo la
funzione $u \in L^2((0, \pi))$ tale che

$$\begin{cases} u'' = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

(Brutalmente: I è l'inverso del Laplaciano con DBC)

□ Intanto è ben definito, cioè $\forall f \in L^2$ esiste unica $u \in L^2$ che risolve.

Dim. esistenza 1 Analisi quasi 1: poniamo

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt \quad \hat{F}(x) := \int_0^x F(s) ds$$

e poi poniamo $u(x) = \hat{F}(x) + a + bx$, scegliendo a e b in modo da rispettare DBC.

Dim. esistenza 2 Formulazione variazionale via pbm. di min.

$$\min \left\{ \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + f u \right) dx : u \in H_0^1((0, \pi)) \right\}$$

Da qui in poi è metodo diretto standard.

Dim. esistenza 3 Lax-Milgram (vedi les. corrispondente)

2) L'operatore I è simmetrico

Dim. $\ddot{u} = f$
DBC

$\ddot{v} = g$
DBC

$u = If$
 $v = Ig$

$$\langle If, g \rangle = \int_0^\pi u g = \int_0^\pi u \ddot{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{DBC su } u}}{=} - \int_0^\pi \dot{u} \dot{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{DBC su } v}}{=} \int_0^\pi \ddot{u} v = \langle f, Ig \rangle$$

Oss. Vale un discorso analogo per inversi di altre derivate di ordine pari più di avere BC opportune

Oss. Bisognava verificare di avere abbastanza regolarità per l'integrazione per parti.

3) L'operatore I è compatto.

(L'idea brutale è che regolarizza, quindi restituisce un OUTPUT "migliore" dell'INPUT)

Dim. Si tratta di applicare Ascoli - Arzelà.

Cosa dobbiamo dim: data $\{f_n\} \subseteq L^2$ limitata, serve che $\{If_n\}$ relativamente compatte in L^2 .

$\{f_n\} \subseteq L^2$ equilimitate $\Rightarrow$ $\dot{u}_n$ equi $\frac{1}{2}$ -Hölder

Per avere equiimitatezza di $\dot{u}_n$ osserviamo che $\dot{u}_n$ si annulla in $(0, \pi)$ almeno una volta per ROLLE.

Ora

$$\dot{u}_n \rightarrow v_\infty \quad \text{unif. su } [0, \pi]$$

Grazie alle DBC deduciamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{unif. su } [0, \pi]$$

e la conv. unif. implica quella L^2 .

Varianti: $I: L^2 \rightarrow H_0^1$ è compatto?

Certo! Se $\{f_n\}$ sono limitate in L^2 , allora $u_n \rightarrow u_\infty$ e $\dot{u}_n \rightarrow v_\infty = \dot{u}_\infty$ unif., e questo implica conv. in H_0^1 .

$I: L^2 \rightarrow H^2$ è compatto? Assolutamente no (bisognerebbe fare l'esempio)

È almeno continuo? Sì! (facile esercizio)

④ L'operatore I è iniettivo (verifica quasi ovvia)

Quindi I rientra nel teo. spettrale e il suo inverso sarà un operatore di moltiplicazione non limitato.

⑤ Chi sono autovalori / autovettori di I ? E quindi anche dell'inverso?

Dim. Dobbiamo risolvere $If = \lambda f$, cioè (posto $u := If$)

$\lambda u = u''$ Ora per bootstrap è tutto C^∞ , quindi le
 $\uparrow$ sarebbe $\frac{1}{\lambda}$, ma derivate sono derivate vere, quindi è analisi 1.
 è lo stesso

Per det. il segno di λ , moltiplichiamo per u e int. per parti

$$\int_0^\pi \lambda u^2 = \int_0^\pi i i u = - \int_0^\pi i^2 \Rightarrow \lambda < 0$$

Le soluzioni sono del tipo $u(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\dots)$
Usando le DBC si scopre che $a=0$ e $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$,
quindi $-\lambda = n^2$ con n intero.

Conclusione: gli autovalori di I sono del tipo $-\frac{1}{n^2}$ (devono andare a 0) con autovettori $\sin(nx)$

Dirichlet Laplacian Operatore non limitato uguale a
(meno) Δ l'inverso di I .

In termini elementari

$$A: D(A) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

$$Au = -ii$$

con dominio

$$D(A) := H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi))$$

↑ DBC

L'operatore A è un operatore di moltiplicazione con autovalori n^2 corrispondenti alla base ortonormale $\{\sin(nx)\}$

↑
valore mult. per
coeff. opportuno.

— o — o —

Altre RELEASE del Laplaciano

- **NEUMANN LAPLACIAN** $Au = -\ddot{u}$ con

$$D(A) := \{u \in H^2((0, \pi)) : \underbrace{\dot{u}(0) - \dot{u}(\pi)}_{\text{hanno senso in } H^2} = 0\}$$

Questo ha autovalori n^2 con autovettori $\cos(nx)$.

Apparentemente è l'inverso della "doppia primitiva" con NBC, ma non è vero che per ogni $f \in L^2$ posso risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = f \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

È necessario restringersi allo spazio H delle $f \in L^2((0, \pi))$ a media nulla, come si vede da

$$\dot{u}(\pi) - \dot{u}(0) = \int_0^\pi f(t) dt.$$

[Domanda: che succede facendo il metodo diretto sul funzionale?]

- **PERIODIC LAPLACIAN** Come prima $Au = -\ddot{u}$ con dominio

$$D(A) := \{u \in H^2((0, 2\pi)) : u(0) = u(2\pi), \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi)\}$$

Ancora una volta gli autovalori sono n^2 con autovettori $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ (autosp. di dim. 2)

Achtung! Qui c'è il 2π !!!!

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 69

Note Title

17/12/2019

LAPLACIANO COME OPERATORE NON LIMITATOCaso Dirichlet

$$Au = -u''$$

$$(0, \pi)$$

$$D(A) = H^2 \cap H_0^1$$

autovalori : n^2 ($n \geq 1$)

autovettori : $\sin(nx)$ (a meno di costante)

Su un generico intervallo $(0, l)$ avremmo

autovettori : $\sin(n \frac{\pi x}{l})$ autovalori : $(\frac{\pi}{l})^2 n^2$

Caso Neumann

$$Au = -u''$$

$$(0, \pi)$$

$$D(A) = H^2 \text{ con NBC}$$

autovalori : n^2 ($n \geq 0$)

autovettori : $\cos(nx)$

Caso Periodico

$$Au = -u''$$

$$(0, 2\pi)$$

$$D(A) = H^2 \text{ con PBC} \quad (u(0) = u(2\pi) \text{ e } u'(0) = u'(2\pi))$$

autovalori : n^2 ($n \geq 0$)

autovettori : $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$

(ogni autosp. ha dim 2)
tranne per con dim = 1Su un generico intervallo $(0, l)$ verrebbe

autovettori : $\sin(n \frac{2\pi}{l} x)$ e $\cos(n \frac{2\pi}{l} x)$

autovalori : $n^2 (\frac{2\pi}{l})^2$

Oss. In tutti e 3 i casi abbiamo una base di $L^2((0, \ell))$ costituita da autovettori (l'ortogonalità è banale analisi 1; la cosa non ovvia è lo span denso che in questo contesto segue dal teo. spettrale applicato all'inverso)

Prop. Prendiamo il caso Dirichlet in $(0, \pi)$.
Allora

$$u \in D(A^{1/2}) \iff u \in H_0^1((0, \pi))$$

(Più in generale $u \in D(A^s) \iff u \in H^{2s}((0, \pi))$ + opportune condizioni al bordo)

Dim. $\Rightarrow$ Ogni $u \in L^2((0, \pi))$ si scrive come

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$$

dove, a meno di costante, $u_n := \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx$

Ora

$$u \in D(A^s) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 < +\infty$$

Nel nostro caso $s = \frac{1}{2}$ e $\lambda_n = n^2$ abbiamo

$$u \in D(A^{1/2}) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$$

Poniamo

$$S_m(x) := \sum_{k=1}^m u_k \sin(kx)$$

Sappiamo che $S_m(x) \rightarrow u(x)$ in $L^2((0, \pi))$

Inoltre

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^n k u_k \cos(kx)$$

Ora $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2 < +\infty$ per ipotesi e $\{\cos(kx)\}$ sono una base ortonormale (a meno di costante) di $L^2((0, \pi))$. Quindi

$$S_n'(x) \rightarrow v(x) \quad \text{in } L^2((0, \pi))$$

Al solito modo $v(x) = \dot{u}(x)$ (derivata debole) quindi $u \in H^1$.
A questo p.to la convergenza $S_n(x) \rightarrow u(x)$ è pure uniforme (le S_n sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder). Poiché $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$, passando al limite si ha che $u \in H_0^1$.

Oss. Abbiamo che

$$[A^{1/2}u](x) = \sum_{k=1}^{\infty} k u_k \sin(kx)$$

$\uparrow$
 $\sqrt{\lambda_k}$

quindi $A^{1/2}u$ non è $\dot{u}$, ma

$$\|A^{1/2}u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2 = \|\dot{u}\|_{L^2}^2$$

perché $\dot{u} = \sum_{k=1}^{\infty} k u_k \cos(kx)$

⊞ Per ipotesi $u \in H_0^1((0, \pi))$ e vogliamo dim. che $u \in D(A^{1/2})$
cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$$

Utilizziamo formula per i coeff.:

$$\begin{aligned}
 u_n &:= \int_0^\pi u(x) \sin(nx) dx && \text{integro per parti e uso DBC} \\
 &= + \int_0^\pi u'(x) \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_0^\pi u'(x) \cos(nx) dx
 \end{aligned}$$

Ora non basta fare c.s. per dedurre che $|u_n| \leq \frac{1}{n} \cdot \text{cost}$

Oss. chiave: $u_n = \frac{1}{n} v_n$ dove i v_n sono, sempre

a meno della solita costante, i coeff. di $u'(x)$ rispetto al sistema ortonormale $\{\cos(nx)\}$ (non serve nemmeno che spannano un denso)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$$

— 0 — 0 —

Esercizio Posto $H^s := D(A^{s/2})$, dimostriamo che le funzioni in H^s sono continue per $s > \frac{1}{2}$ (è l'equivalente di $w_p > d$ per spazi $W^{u,p}$)

Come al solito $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ e per ipotesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 < +\infty$$

Vorremmo dim. che la serie di sopra converge uniformemente. Basta dim. la convergenza totale, cioè che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$$

Usando l'ipotesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^s |u_n| \frac{1}{n^s} \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right\}^{1/2}$$

$\uparrow$ conv. per hp $\uparrow$ conv. per $s > \frac{1}{2}$

Cosa succede in dim. più alta

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
 $\uparrow$ aperto limitato con
 $\partial\Omega$ decente

Caso Dirichlet $Au = -\Delta u$ $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Claim: esiste $\{e_n(x)\} \subseteq L^2(\Omega)$ ed esiste $\{\lambda_n\} \subseteq (0, +\infty)$ crescente con $\lambda_n \rightarrow +\infty$ t.c.

$$-\Delta e_n(x) = \lambda_n e_n(x) \quad \forall n \geq 1$$

Per farlo, "basta" dimostrare che l'inverso del Laplaciano è simmetrico, compatto, iniettivo (lineare e ben definito)

Data $f \in L^2(\Omega)$ risolviamo $-\Delta u = f$ con DBC e poniamo $Uf := u$.

Buona definizione (esistenza e unicità): approccio variazionale oppure Lax-Milgram

Linearità e iniettività: facili

Simmetria: Gauss-Green + DBC $\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} u \cdot \Delta v$

Compattezza: siano f_n limitate in L^2 . Siano u_n le corrispondenti soluzioni. Claim: le u_n sono compatte in L^2 .

Idea: ottenere stime su u_n e ∇u_n e usare teo. conv. cpt.
 $\uparrow$ gradiente

$$\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \langle \nabla u_n, \nabla u_n \rangle dx = - \int_{\Omega} u_n \cdot \Delta u_n dx$$

$$= - \int_{\Omega} u_n(x) f_n(x) dx \leq \|u_n\|_{L^2} \cdot \|f_n\|_{L^2}$$

$\uparrow$
C.S.

$$\leq \text{cost.} \cdot \|\nabla u_n\|_{L^2} \cdot \|f_n\|_{L^2}$$

$\uparrow$
Poincaré

Conseguenza: $\|\nabla u_n\|_{L^2} \leq \text{cost.} \cdot \|f_n\|_{L^2}$

e con Poincaré di nuovo $\|u_n\|_{L^2} \leq \text{cost.} \|f_n\|_{L^2}$

Ne segue che le $\{u_n\}$ sono equi-H', quindi rel. cpt. in L^2 .

Da qui tu poi è il teo. spettrale.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 70

Note Title

17/12/2019

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato con $\partial\Omega$ decente.

Allora gli autovalori $\{\lambda_k(x)\}$ del Dirichlet Laplaciano sono C^∞

Dtm. Risolvono $-\Delta u(x) = \lambda_m u(x)$

Si dimostra usando la regolarità ellittica (basta teoria L^2) che

$$u_k(x) \in H^k(\Omega) \quad \forall k \geq 0$$

($u_k \in L^2 \Rightarrow u_k \in H^2 \Rightarrow \text{RHS} \in H^1$ e $u_k \in H^2 \Rightarrow u_k \in H^3$
e così via)

[$\Delta u = f$ se $f \in H^1$ e $u \in H^2$, allora $u \in H^3$
 $f \in H^k$ e $u \in H^{k+1}$, allora $u \in H^{k+2}$]

Se una funzione sta in tutti gli H^k , allora sta in C^∞

Se $e_i(x)$ ed $e_j(x)$ sono autovettori ortogonali, allora
 $\Delta e_i(x)$ e $\Delta e_j(x)$ sono ortogonali come elementi di
 $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$

Dtm.
$$\int_{\Omega} \langle \Delta e_i(x), \Delta e_j(x) \rangle dx = - \int_{\Omega} e_i(x) \Delta e_j(x) dx$$

$$= \lambda_j \int_{\Omega} e_i(x) e_j(x) dx = 0$$

Nel caso $i=j$ otteniamo

$$\int_{\Omega} \|\Delta e_i(x)\|^2 dx = \lambda_i$$

Grazie al fatto precedente possiamo dimostrare che

$$u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \iff u \in H_0^1(\Omega)$$

Caso speciale $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$

In questo caso gli autovalori di $-\Delta$ con DBC sono

$$n^2 + m^2 \quad \text{con } n, m \text{ interi non entrambi nulli e dispari}$$

con autovettori $\cos(mx) \cdot \cos(my)$

Dim. Che siano ortogonali è analisi 2.

Che siano autovettori: basta calcolare il Laplaciano

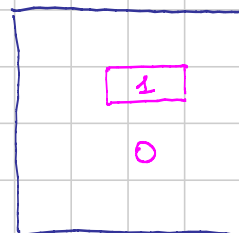
La cosa non ovvia è che sono tutti gli autovettori. Per questo occorre dimostrare che spaziano un denso.

Ci sono vari modi

- Carrière: Stone - Weierstrass.
- Del tutto elementare: basta saper approssimare un sottoinsieme di L^2 che spaziano un denso.

Scegliamo le funzioni caratteristiche dei rettangolini contenuti in Ω

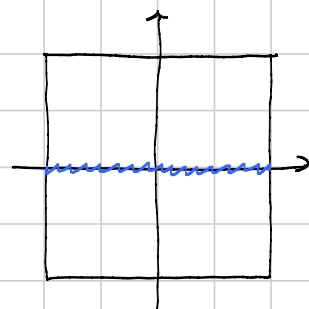
Idea: sono prodotto di caratteristiche in una variabile, quindi basta approx. separatamente i due fattori e moltiplicare tutto.



[Aggiunto dopo video: quello detto sopra è incompleto, nel senso che non si possono usare solo cosevi. Il motivo è che in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gli autovalori sono n^2 ($m=1$) con autovettori $\cos(mx)$ per n dispari e $\sin(mx)$ per n pari. Quindi tanto valeva lavorare in $(0, \pi) \times (0, \pi)$, almeno c'erano solo seni]

Data $u \in H_0^1$ (quadrato), consideriamo la sua traccia sull'asse x :

$$u(x, 0)$$



Per la teoria delle tracce sappiamo che ha senso e sta in L^2 , anzi pure un po' meglio $\left(\frac{p(d-1)}{d-p}\right)$

Claim: immagine della traccia (cioè le funzioni sul segmento che sono traccia di qualcosa in H^1) è $H^{1/2}$.

Dim. 1° parte: la traccia sta in $H^{1/2}$

$$u(x, y) = \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \cos(ny)$$

Ora

$$u \in H_0^1 \Leftrightarrow \sum_{m, n} (m^2 + n^2) u_{m, n}^2 < +\infty \Leftrightarrow u \in \mathcal{D}(A^{1/2})$$

$$\text{Tr } u(x) = \sum_{\substack{m, n \\ y=0}} u_{m, n} \cos(mx)$$

$$= \sum_m \underbrace{\left(\sum_n u_{m, n} \right)}_{v_m} \cos(mx)$$

La tesi è che $\sum_m m v_m^2 < +\infty$

(in dim. 1 gli autovalori sono m^2 , quindi con $A^{1/4}$ gli autov. sono $\sqrt{m}$ e al $\square$ viene m)

Come stimiamo i v_m :

$$v_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2+n^2} \cdot u_{m,n} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (m^2+n^2) u_{m,n}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} \right\}^{1/2}$$

e quindi

$$\sum_{m=1}^{\infty} m v_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} (m^2+n^2) u_{m,n}^2$$

$$m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2}$$

≤ costante per un fatto di Analisi 1

$$< +\infty$$

quindi la traccia sta in $H^{1/2}$.

2ª parte: se $v \in H^{1/2}$, allora è traccia di una $u \in H_0^1$

Ora abbiamo $v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cos(mx)$ e sappiamo che

$$\sum_{m=1}^{\infty} m v_m^2 < +\infty$$

Vogliamo trovare $u(x, y) = \sum_{m,n} u_{m,n} \cos(mx) \cos(ny)$

tale che

$$\sum_{m,n} (m^2+n^2) u_{m,n}^2 < +\infty \quad \text{e} \quad v_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$$

Formalmente: ogni v_m lo dobbiamo ripartire in tanti $u_{m,n}$

Scelta conetta

$$u_{m,n} := \frac{v_m}{m^2 + n^2} \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right)} \quad \leftarrow \text{dividere per questo è come moltiplicare per } m$$

La seconda condizione è ovvia per definizione. Resta da controllare la 1^a:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} (m^2 + n^2) u_{m,n}^2 &= \sum_{m,n} \frac{v_m^2}{(m^2 + n^2)} \frac{1}{\left(\sum \dots \right)^2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sum \dots \right)^2} v_m^2 \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} v_m^2 \frac{1}{\left(\sum \dots \right)} \sim \sum_{m=1}^{\infty} m v_m^2 < +\infty \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Cose non fatte durante il corso:

① Problemi di evoluzione $u_t = u_{xx} + \sin u$
 $u_{tt} = u_{xx} + \sin u$

② Regolarità ellittica (L^p , Schauder, De Giorgi)

Dal p.to di vista tecnico:

- teo. spettrale + generale
- spazi BV (funzioni a variazione limitata)
- teo. di rappresentazione del duale di $C^0(\Omega)$ = chiusura di $C_c^0(\Omega)$ risp. alla norma L^∞ (solo misure)
- amenità "minori": top. deboli (e non solo conv.), sp. unif. convessi, ...

Enunciato preciso di teo. spettrale in generale

Sia H Hilbert (meglio se separabile) e sia $A: D(A) \rightarrow H$ operatore non limitato e autoaggiunto (simmetrico + il dominio è il massimo possibile).

Allora esistono

- uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ decente
- una isometria lineare

$$i: H \rightarrow L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$$

- una funzione misurabile $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{i} & L^2(X, \mathcal{M}, \mu) \\
 \downarrow A & & \downarrow \text{applicazione} \\
 & & u(x) \rightarrow \lambda(x) u(x) \\
 H & \xrightarrow{i} & L^2(X, \mathcal{M}, \mu)
 \end{array}$$

Oss. Serie e trasformata di Fourier rientrano in questo quadro.

