

A.A. 2019/2020
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 25. Derivate W-deboli e H-deboli: definizione, prime proprietà, H implica W. Esempio di funzione con le derivate seconde deboli miste ma senza derivate prime deboli. Enunciato W implica H. Spazi di Sobolev in piena generalità (ogni ordine e dimensione, aperto qualunque): definizione W e H. Osservazione che H è contenuto in W. Enunciato dei tre teoremi di approssimazione: versione low-cost, Meyers-Serrin ($H=W$), versione deluxe.	6
Lezione 26. Teoremi algebrici in spazi di Sobolev: derivata debole del prodotto di due funzioni Sobolev, della composizione (con Sobolev dentro) e del valore assoluto. Discussione di varie strategie dimostrative a seconda dell'esponente (finito o infinito) e del teorema di approssimazione che si vuole utilizzare (low-cost o Meyers-Serrin).	12
Lezione 27. Richiami su mollificatori e regolarizzazione per convoluzione. Le convoluzioni commutano con le derivate W-deboli. Dimostrazione del teorema di approssimazione low-cost per funzioni di Sobolev. Dimostrazione che le derivate W-deboli sono anche H-deboli.	17
Lezione 28. Il prodotto di una funzione Sobolev per una funzione C-infinito a supporto compatto è ancora Sobolev. Partizioni dell'unità associate ad un ricoprimento localmente finito di un aperto mediante aperti ben contenuti. Dimostrazione del teorema $H=W$ (Meyers-Serrin 1964).	23
Lezione 29. Teoremi di immersione: enunciato dei tre casi, in tutto lo spazio e in un aperto regolare, sia per derivate prime, sia per derivate di ordine qualunque. Stime con il solo gradiente vs stime con la full norm. Problema dell'estensione: definizione di extender e sue implicazioni in termini di approssimazione deluxe e di immersione.	29
Lezione 30. Disuguaglianza di Gagliardo (caso speciale di Brascamp-Lieb): enunciato e dimostrazione. Argomento di riscaldamento che conduce agli esponenti corretti nelle disuguaglianze di Sobolev.	34
Lezione 31. Approssimazione deluxe per funzioni di Sobolev su tutto lo spazio. Dimostrazione delle immersioni di Sobolev nel caso di esponente minore o uguale della dimensione.	40
Lezione 32. Dimostrazione delle immersioni di Sobolev negli spazi di funzioni Holderiane (Morrey). Annullamento all'infinito delle funzioni di Sobolev con esponente maggiore della dimensione. Strategie per la costruzione di esempi e controesempi: argomento di riscaldamento, utilizzo di funzioni radiali.	46

Lezione 33. Presentazione generale dei teoremi di estensione. Estensione per riflessione nei cilindri. Discussione generale delle ostruzioni all'estensione: bordi bilateri, cuspidi, restringimenti.	52
Lezione 34. Aperti con bordo di classe $C-1$. Isomorfismo tra gli spazi di Sobolev di aperti diffeomorfi. Partizioni dell'unità per aperti con bordo compatto. Dimostrazione dell'esistenza di una 1-estensione per aperti con bordo compatto di classe $C-1$	58
Lezione 35. Obiettivo dei teoremi di immersione compatta. Richiami dei fatti essenziali su compattezza, relativa compattezza e totale limitatezza in spazi metrici. Criterio di relativa compattezza in spazi L_p (versione L_p di Ascoli-Arzelà).	64
Lezione 36. Teorema di immersione compatta in spazi di Sobolev (Rellich-Kondrachov): enunciato e dimostrazione. Enunciato della disuguaglianza di interpolazione in spazi L_p . Controesempio all'immersione compatta nel caso critico. (audio inascoltabile).	70
Lezione 37. Presentazione generale del problema delle tracce. Tracce di funzioni di Sobolev nel caso modello del semispazio: disuguaglianza fondamentale nel caso smooth, ulteriore regolarità L_p , definizione per approssimazione. Proprietà di base della traccia: linearità, coincidenza con la restrizione al bordo nel caso continuo, formula di integrazione per parti. (audio mancante)	76
Lezione 38. Holderianità della traccia. Dipendenza continua della traccia sotto ipotesi di limitatezza dei gradienti, controesempio nel caso $p=1$. Road map per estendere la definizione di traccia ad aperti regolari. Accenno al problema dell'immagine della traccia.	81
Lezione 39. Funzioni di Sobolev che si approssimano mediante funzioni C -infinito a supporto compatto: definizione, teoremi di immersione e immersione compatta, caratterizzazione negli aperti con bordo regolare mediante traccia nulla o estensione a zero.	87
Lezione 40. Approssimazione mediante funzioni C -infinito a supporto compatto di funzioni di Sobolev definite in tutto lo spazio meno un punto. Problema della p -capacità di un punto in una sfera: discussione al variare della dimensione spaziale e dell'esponente p	92
Lezione 41. Disuguaglianze alla Poincaré-Sobolev (stima della q -norma di una funzione nulla al bordo in termini della p -norma del gradiente) e alla Poincaré-Sobolev-Wirtinger (stima della q -norma della differenza tra una funzione e la sua media in termini della p -norma del gradiente). Dimostrazione in alcuni casi via problema di minimo e metodo diretto.	97
Lezione 42. Dimostrazione delle disuguaglianze alla Poincaré-Sobolev-Wirtinger nel caso generale (via compattezza per il caso $p=q$ e teoremi di immersione per il caso generale). Esempio di approccio variazionale a due equazioni ellittiche: esistenza di una soluzione debole via metodo diretto.	103

- Lezione 43.** Introduzione alla regolarità per equazioni ellittiche: motivazioni, condizione di ellitticità, equazioni lineari, semi-lineari, quasi-lineari. Quadro generale dei risultati di regolarità (interna e fino al bordo) per equazioni ellittiche lineari: teoria L_2 , teoria L_p e teoria di Schauder. Applicazioni al caso semi-lineare. 108
- Lezione 44.** Enunciato dei teoremi di regolarità L_2 , interni e fino al bordo. Stime a priori per la regolarità interna, in tutto lo spazio ed in un aperto generico. 114
- Lezione 45.** Derivate discrete: definizione e principali proprietà. Caratterizzazione degli spazi di Sobolev in termini di derivate discrete. Dalle stime a priori alla regolarità ellittica via derivate discrete. 119
- Lezione 46.** Regolarità fino al bordo per equazioni ellittiche con condizioni di Dirichlet: stime a priori in un semispazio, formalizzazione mediante derivate discrete, caso generale in aperti regolari. 125

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 25

Note Title

24/10/2019

DERIVATE DEBOLI

Setting generale :

- $d \geq 1$ intero (dimensione)
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque
- $m \geq 1$ intero (ordine di derivazione)
- $p \in [1, +\infty]$ estremi compresi

Notazione dei multiindici (vedi Analisi 2) :

$$\alpha \in \mathbb{N}^d \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

Se $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Def. (Derivata debole, defn. w)

Setting come sopra, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $v \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Si dice che v è la derivata α -esima di u in senso debole se

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

In tal caso scriviamo

$$v = D^\alpha u \quad \text{in senso } \overset{\text{weak}}{\text{w-debole}}$$

Oss. È come dire che v gioca il ruolo di $D^\alpha u$ nell'int. per parti.

Proprietà facili

① Unicità Se u_1 e u_2 sono due deriv. deboli, allora

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_1 \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_2 \varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (u_1 - u_2) \varphi = 0 \quad \text{FLCV} \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ q.o.}$$

② Linearità

③ Compatibilità facile classica Se $u \in C^m(\Omega)$, allora u ammette derivata α -esima W debole per ogni $|\alpha| \leq m$ e sono quelle classiche

④ Se $v = D^{\alpha} u$ in senso W in Ω , allora le restrizioni ad $\Omega' \subseteq \Omega$ hanno la stessa proprietà

⑤ Se $v = D^{\alpha} u$ in ogni aperto $\Omega' \subset \subset \Omega$, allora $v = D^{\alpha} u$ in Ω .

Data $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, basta prendere $\Omega' \subset \subset \Omega$ che contiene il supporto φ .

Prop. (Stabilità per passaggio al limite)

Solito setting. Sia $\{u_m\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ e $\{v_m\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo che

(i) $v_m = D^{\alpha} u_m$ in senso W per ogni $m \in \mathbb{N}$

(ii) $u_m \rightarrow u_{\infty}$ debole in $L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$,

(iii) $v_m \rightarrow v_{\infty}$ " " " "

Allora

$$v_{\infty} = D^{\alpha} u_{\infty}.$$

Questo dimostra che $u_{xy} \equiv 0$.

Dimostro che u_y non esiste.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \varphi_y(x,y) dx dy \\
 &= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy (-1) \varphi_y(x,y) + \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_y(x,y) \\
 &= - \int_{-R}^0 dx \{ \varphi(x,0) - \varphi(x,-R) \} + \int_0^R dx \{ \varphi(x,R) - \varphi(x,0) \} \\
 &= - \int_{-R}^R \varphi(x,0) dx
 \end{aligned}$$

Vorrei che si potesse scrivere come

$$- \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

Questo è impossibile che valga per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Se vale per $\varphi(x,y)$, allora vale per

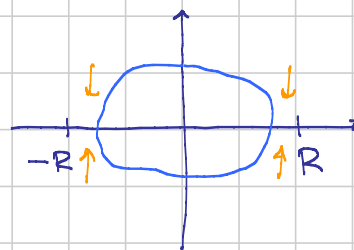
$$\varphi_m(x,y) := \varphi(x, my)$$

$$\int_{-R}^R \varphi_m(x,0) dx = \int_{-R}^R \varphi(x,0) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_m(x,y) u(x,y) dx dy = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) u(x,y) dx dy$$

cambio di variabili

Oss. In realtà un giorno u_y esisterà come misura e non dipende da x .



Def. (Derivata debole, def. H)

Solito setting. Si dice che $v = D^\alpha u$ in senso H se esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$ (o in $C_c^\infty(\Omega)$, o in $C^{|\alpha|}(\Omega)$) tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p_{loc}(\Omega)$
 - $D^\alpha u_n \rightarrow v$ " } cioè in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.
- ↑ esistono classiche

Prop. facile ($H \Rightarrow W$)

Dim. Stabilità delle derivate in senso W, dopo aver osservato che se $D^\alpha u$ sono anche derivate W.

Teorema $W \Rightarrow H$ se $p < +\infty$

Def. (Spazi di Sobolev, def. W)

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}$$

↑ in senso W

Def. (Spazi di Sobolev, def. H) $H^{m,p}(\Omega)$

Due versioni

- Come sopra, solo con derivate in senso H 😊
- Come completamento di $C^{m,p}(\Omega)$ o $C^\infty_p(\Omega)$ rispetto alla distanza indotta dalla norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$$

↑ c'è anche il $\alpha = (0, \dots, 0)$

Si intende che

$$C^{m,p}_\infty(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p,\Omega} < +\infty\}$$

Facile: • Le due varianti di H sono la stessa cosa
• $H \Rightarrow W$

Difficile : $W \Rightarrow H$

Teoremi di approssimazione

ESCLUSO

↓

Siano $d \geq 1$ intero, $m \geq 1$ intero, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty)$.
Sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Supponiamo $\Omega \dots$ Allora esiste $\{u_m\} \dots$ t.c.
 $u_m \rightarrow u \dots$ e $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u \dots$

LOW COST

$H = W$ (MEYERS-SERRIN)
1964

DELUXE

Ω qualunque

Ω qualunque

$\partial\Omega$ "regolare"

$\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega)$

$\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$

$u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$

$u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$

$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$
in $L^p_{loc}(\Omega)$

$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$

$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$

succ. bella
conv. bruttina

succ. passabile
conv. bella

succ. bella
conv. bella

DIM. FACILE

DIM. DELICATA

DIPENDE DALLE
IPOTESI SU $\partial\Omega$

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 26

Note Title

24/10/2019

TEOREMI ALGEBRICI

- Prodotto
- Composizione fuori
- Valore assoluto
- Composizione dentro

Prodotto $d \geq 1, m=1, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, p \in [1, +\infty]$

Siano

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

Allora

$$uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

I prodotti sono ben definiti perché

$$u, v \in L^\infty$$

(in dim 1 è GRATIS)

DimIdea: $u_n \rightarrow u \quad v_n \rightarrow v$

$$D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u \quad D_{x_i} v_n \rightarrow D_{x_i} v$$

e spero che

$$u_n v_n \rightarrow uv$$

$$D_{x_i}(u_n v_n) = D_{x_i} u_n \cdot v_n + D_{x_i} v_n \cdot u_n \rightarrow D_{x_i} u \cdot v + D_{x_i} v \cdot u$$

↑ Formula classica

per funzioni regolari

Dettagli $p < +\infty$

Se voglio usare Meyers-Serrin, la convergenza delle prime 2 righe sono in $L^p(\Omega)$ e quindi, a meno di s.succ., puntuale q.o. + dominata.

A questo p.to anche la convergenza successive sono puntuale q.o. + dominate, dunque in $L^p(\Omega)$.

Importante, se u e v sono in L^∞ , oltre che in $W^{1,p}$, posso

sempre assumere che le u_m e le v_m sono in L^∞ con la stessa costante.

In realtà basta il low-cost, dal quale dedurrei quello che voglio in ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$, ma essendo Ω' arbitrario, questo basta.

Dettagli per $p = +\infty$ Qui non ci sono teo. di approx.

Ora per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$ abbiamo che $u, v \in W^{1,2019}(\Omega')$

Dal caso precedente deduco che
 $uv \in W^{1,2019}(\Omega')$

e ottengo approssimanti

$$\left. \begin{array}{l} u_m v_m \rightarrow uv \\ D_i(u_m v_m) \rightarrow D_i(uv) \end{array} \right\} \text{ in } L^{2019}(\Omega') + \text{ puntuale q.o.}$$

Inoltre le approx u_m e v_m e le relative derivate sono in L^∞ con costanti dicinquate, dunque i limiti stanno in $L^\infty(\Omega')$.

Essendo Ω' arbitrario, abbiamo finito.

Oss. Quello che ci sta sotto è

$$\left. \begin{array}{l} u_m \rightarrow u_\infty \text{ in } L^{2019} \\ \|u_m\|_{L^\infty} \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow u_\infty \in L^\infty$$

$\uparrow$
 a meno di s.sua.
 è puntuale q.o.

Composizione fuori Setting come prima, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) $\varphi(0) = 0$ (non serve se $\text{meas}(\Omega) < +\infty$)

(ii) $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

(iii) $|\varphi'(x)| \leq L$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora

$$\varphi(u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\nabla[\varphi(u)] = \varphi'(u) \nabla u$$

$$D_{x_i}[\varphi(u)] = \varphi'(u) D_{x_i} u$$

$\uparrow$
 L^∞

$\uparrow$
 L^p

Dim. Solita idea $u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ + puntuale
 $D_{x_i} u_m \rightarrow D_{x_i} u$ in $L^p(\Omega')$ dominata

Spero tanto che

$$\varphi(u_m) \rightarrow \varphi(u)$$

$$\varphi'(u_m) D_{x_i} u_m \rightarrow \varphi'(u) D_{x_i} u$$

puntuale q.o. dominato, e quindi in $L^p(\Omega) \circ L^p(\Omega')$

La puntuale q.o. è gratis per continuità di φ e φ' .

La dominazione segue

$$|\varphi(u_m(x))| = |\varphi(u_m(x)) - \varphi(0)| \leq L |u_m(x)|$$

$\uparrow$
 (i)

$\uparrow$
 (iii)

$$|\varphi'(u_m(x))| \cdot |D_{x_i} u_m(x)| \leq L |D_{x_i} u_m(x)|$$

Questo completa la dim. per $p < +\infty$.

Nel caso $p = +\infty$ ci si basa su L^{2019} .

— o — o —

Oss. Con le derivate successive le cose peggiorano, anche in una variabile

$$\begin{aligned} (\sin u)' &= \dot{u} \cos u \\ (\sin u)'' &= -\dot{u}^2 \sin u + \ddot{u} \cos u \end{aligned}$$

$\uparrow \uparrow$ $\uparrow$
 qui si qui ok
 dimostra la sommabilità
 — 0 — 0 —

Valore assoluto Solito setting. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$[D_{x_i} |u|](x) = \operatorname{sign}(u(x)) \cdot D_{x_i} u(x)$$

Dim. Approssiamo il valore assoluto, con φ_n . Pongo

$$\varphi_n(\sigma) := \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$$

Si verifica che $\varphi_n(0) = 0$ e $|\varphi_n'(\sigma)| \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \varphi_n(\sigma) &\rightarrow |\sigma| & \forall \sigma \in \mathbb{R} \\ \varphi_n'(\sigma) &\rightarrow \operatorname{sign}(\sigma) & \forall \sigma \neq 0. \\ &\rightarrow 0 & \text{se } \sigma = 0 \end{aligned}$$

Per la composizione fuori sappiamo che $\varphi_n(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$D_{x_i}[\varphi_n(u)] = \varphi_n'(u) D_{x_i} u$$

$$\text{Inoltre} \quad \varphi_n(u(x)) \rightarrow |u(x)| \quad \forall x \in \Omega$$

$$\varphi_n'(u) D_{x_i} u \rightarrow \operatorname{sign}(u(x)) \cdot D_{x_i} u$$

Uso stabilità per passaggio al limite (ho tutte le dominazioni che servono).

Oss. Il max / min tra 2 funzioni Sobolev è sobolev, quindi in particolare le troncate di una Sobolev sono Sobolev!

$$\left[\max\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} \right]$$

Composizione dentro Solito setting, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque
Sia data $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ di classe C^1 .

Allora

$$v(x) = u(\varphi(x)) \in W^{1,p}(\Omega')$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i}$$

componente j -esima di φ

o in modo più compatto

$$\nabla v(x) = \nabla u(\varphi(x)) \underbrace{J\varphi(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{matrice jacobiana}}}$$

Dim Come sempre approssimo u e mi ritrovo una approx nel senso giusto di v .

[Sare qualche ipotesi, del tipo jacobiano limitato].

[Dopo video: l'ultimo teorema è molto impreciso. Sare in realtà che $J\varphi$ e $J(\varphi^{-1})$ siano limitate. Sporo di riprenderlo più avanti con maggiori dettagli]

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 27

Titolo nota

28/10/2019

MOLLIFICATORI

Un mollificatore è una funzione $\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) un po' di regolarità, ad esempio $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

(ii) $\rho(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

(iii) $\rho(x) = 0$ se $|x| \geq 1$

(iv) vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$$

$\uparrow B(0,1)$

CONVOLUZIONE

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un mollificatore.

Per ogni $\varepsilon > 0$ si pone

$$(u * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x + \varepsilon y) \rho(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon^d} dz$$

$\uparrow B(0,1)$ $\uparrow B(x,\varepsilon)$

$x + \varepsilon y = z$

Se $u \in L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, allora si può definire allo stesso modo dopo aver esteso u a 0 fuori di Ω , cioè

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

e poi pongo $\hat{u} * \rho_\varepsilon$.

— o — o —

Teorema Sia $\mu \in L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia ρ mollific.
e sia

$$\mu_\varepsilon(x) := (\hat{\mu} * \rho_\varepsilon)(x)$$

↑ estesa

Allora valgono i seguenti fatti.

(i) $\mu_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ se $\rho \in C^\infty$

(ii) il supporto di μ_ε è contenuto in

$$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{x \in \Omega} \bar{B}(x, \varepsilon)$$

(iii) se $\mu \in L^p(\Omega)$ per un certo $p \in [1, +\infty]$, allora $\mu_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$
e vale

$$\|\mu_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu\|_{L^p(\Omega)}$$

(iv) La convoluzione è lineare

escluso

(v) se $\mu \in L^p(\Omega)$ per un certo $p \in [1, +\infty)$ allora

$$\mu_\varepsilon \rightarrow \mu \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \text{ e } L^p(\Omega)$$

Oss. (v) è senza speranza per $p = +\infty$; pensare a una
funzione costante in un intervallo.

— o — o —

Proposizione (La convoluzione commuta con le deriv. w-deboli)

Siano $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$ due aperti. Siano $u \in L^1(B)$ e $v \in L^1(B)$.

Sia ρ mollificatore C^∞ .

Supponiamo che $v = D^\alpha u$ in senso w per un certo α multiind.

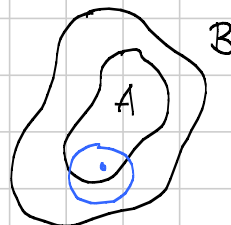
Sia

$$\varepsilon_0 := \text{dist}(A, \partial B)$$

Allora per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ vale che

$$D^\alpha [u * \rho_\varepsilon](x) = [v * \rho_\varepsilon](x) \quad \forall x \in A$$

le convoluzioni sono fatte dopo aver esteso a 0 fuori di B



Dim. Facciamo il conto

$$D_x^\alpha [\hat{u} * \rho_\varepsilon](x) \stackrel{\text{def}}{=} D_x^\alpha \left[\frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d = B(x, \varepsilon)} \hat{u}(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz \right]$$

$$\stackrel{\text{deriv. sotto segno int}}{\nearrow} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d = B(x, \varepsilon)} \hat{u}(z) D_x^\alpha \left[\rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \right] dz$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{\nearrow} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) [D^\alpha \rho] \left(\frac{z-x}{\varepsilon} \right) \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|}} dz$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{\nearrow} = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) D_z^\alpha \left[\rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \right] dz$$

ρ ha supporto compatto in B

$$\stackrel{v = D^\alpha u \text{ in } B}{\nearrow} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d = B(x, \varepsilon)} \hat{v}(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$$

$$\stackrel{\text{defin.}}{\nearrow} = (\hat{v} * \rho_\varepsilon)(x)$$

Se $x \in A$, allora $B(x, \varepsilon) \subseteq B$ e quindi i cappucci usi di sono

Approx Low cost per Sobolev

Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $p < +\infty$, allora esiste $\{u_\varepsilon\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

$$D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } L^p_{\text{loc}}(\Omega) \quad \text{per ogni } |\alpha| \leq m.$$

Dim. Basta porre $u_\varepsilon := (\hat{u} * \rho_\varepsilon)$. Allora

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

$$(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

una non è vero
che $(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon =$
 $= D^\alpha (u * \rho_\varepsilon)$ su
tutto Ω

Ma allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ vale che

$$(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } L^p(\Omega')$$

" $\leftarrow$ vale su Ω' quando ε
 $D^\alpha u_\varepsilon$ è abbastanza piccolo
— o — o —

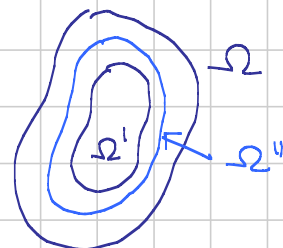
Teorema $W \Rightarrow H$ per le derivate deboli

Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $v = D^\alpha u$ in senso W , allora esiste $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che

- $u_m \rightarrow u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,
- $D^\alpha u_m \rightarrow v$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Dim. **Step 1** Fisso $\Omega' \subset\subset \Omega$ e acccontento dei.

Fisso Ω'' con $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$
(spiegare bene perché si può fare)



Estendo u a $\hat{u}$ che vale 0 fuori di Ω'' e pongo

$$u_\varepsilon = \hat{u} * \rho_\varepsilon$$

Come sopra abbiamo che

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega'') \quad \text{e quindi anche in } L^1(\Omega')$$

$$D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u) * \rho_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } L^1(\Omega')$$

$\uparrow$
vale solo
in Ω' per
 ε piccolo

$\uparrow$
varrebbe anche
in $L^1(\Omega'')$ con opportuni cappucci

Prendendo $\varepsilon_n \rightarrow 0$ abbiamo la tesi per Ω'

Step 2 Voglio una u_m che va bene per ogni Ω' .

Per ogni intero $k \geq 1$ pongo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

$$\overline{B}(x, \frac{1}{k}) \subseteq \Omega$$

$\uparrow$ chiusura aggiunta dopo video

Osservo che

- $\Omega_k \subset \subset \Omega$ per ogni k
- per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$ si ha che $\Omega' \subset \subset \Omega_k$ definitivamente.

[Dimostrarlo !!]

Per ogni k so acccontentare Ω_k , ma non posso chiudere con un procedimento diagonale.

Per ogni k posso trovare, grazie allo step 1, una funzione u_k tale che

$$\|u - u_k\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

$\nwarrow$ qualunque succ. che
va a 0 va bene

$$\|D^\alpha u - D^\alpha u_k\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

Dico che $\{u_k\}$ acccontenta ogni Ω' .

Infatti definitivamente vale che $\Omega' \subseteq \Omega_k$ e quindi

$$\|u - u_k\|_{L^1(\Omega')} \leq \|u - u_k\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

e idem per le derivate α -esime.

— o — o —

Oss. Se u e $D^\alpha u$ erano un po' meglio, diciamo $L^p_{loc}(\Omega)$ con $p < +\infty$, allora le convergenze sono in L^p_{loc} .

Oss. Abbiamo assunto solo che $D^\alpha u$ esista per un certo fissato α .

— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 28

Note Title

28/10/2019

Teorema $H=W$ (Meyers-Serrin 1964)Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque e sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$ con $m \geq 1$ e $p < +\infty$ Allora esiste $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che
 $\uparrow$ senza c

$$u_m \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

$$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{per ogni } |\alpha| \leq m.$$

Lemma fastidioso (Sobolev $\cdot C_c^\infty = \text{Sobolev}$)Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora $u\psi \in W^{m,p}(\Omega)$
e vale per $D^\alpha(u\psi)$ la formula che uno vorrebbe.PARTIZIONE DELL'UNITÀ DI TIPO ALemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto. Sia $\{A_k\}$ una succ. di
aperti tali che(i) $A_k \subset A$ (ii) A_k ricoprono A nel senso che[Nel video qualche A si
chiama per errore Ω 😊]

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$$

(iii) il ricoprimento è loc. finito, cioè per ogni compatto $K \subseteq A$
si ha che $\{k \in \mathbb{N} : A_k \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.Allora esiste una succ $\{\psi_k\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

- $\psi_k \in C_c^\infty(A_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$
- $\psi_k(x) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^d$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ per ogni $x \in A$.

Oss. Fissato $x \in A$, la serie è una somma finita

(qui basta ricopr. punt. finito) [Puntualmente corretto dopo video]

— o — o —

Dim di $H = W$ Sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Se per caso u ha supp. compatto in Ω , allora la tesi è banale

(basta usare le convoluzioni come nel low-cost)

Altrimenti per ogni $k \geq 1$ pongo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k, \text{ dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

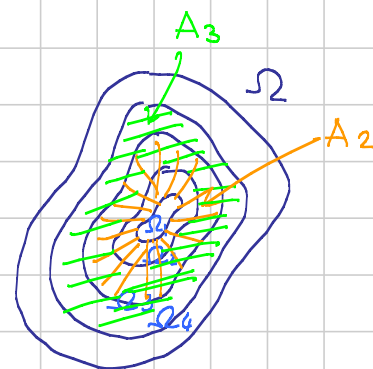
$$\bar{B}(x, \frac{1}{k}) \subseteq \Omega$$

Per solidarietà pongo $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$

Poniamo

$$A_k := \Omega_{k+1} \setminus \text{Clos}(\Omega_{k-1}) \quad \forall k \geq 1$$

$$B_k := \Omega_{k+2} \setminus \text{Clos}(\Omega_{k-2}) \quad \forall k \geq 1$$



Gli $\{A_k\}$ verificano le ipotesi del Lemma di partizione dell'unità [Verificarlo!]

Sia $\{\varphi_k\}$ la corrispondente partizione.

Allora osservo che, posto $u_k = u \cdot \varphi_k$ si ha che

- u_k ha supporto compatto in Ω ($\text{supp } u_k \subseteq A_k \subset \subset \Omega$)

- $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ (somma finita ad x fisso)

Obiettivo: dato $\varepsilon > 0$ voglio trovare $v \in C^\infty(\Omega)$ t.c.

$$\|u - v\|_{m,p,\Omega} \leq \varepsilon$$

Poiché le u_k hanno supporto compatto, allora per ogni k esiste v_k tale che

$$\|u_k - v_k\|_{m,p,\Omega} \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

Dove sta v_k ? Di sicuro posso assumere che $v_k \in C^\infty(\Omega)$
e che anzi $v_k \in C_c^\infty(B_k)$

↑ volendo puoi arrivare pure ad A_k

Pongo

$$v(x) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

e osservo che

- converge perché è puntualmente finita
- è di classe $C^\infty(\Omega)$ perché la somma è loc. finita (in ogni $B(x,r) \subset \Omega$ è somma di numero finito di funzioni C^∞)

Dico che v va bene perché

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k - v_k \right\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k - v_k\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sublemma Sia $\{A_k\}$ come nella partizione dell'unità.
Allora per ogni k esiste $\hat{A}_k$ tale che

- $\hat{A}_k \subset A_k$
- $\{\hat{A}_k\}$ sono ancora un ricoprimento.

Dim. Basta far vedere che posso risparmiare su A_1 e reiterare il procedimento.

Per ogni $n \geq 1$ intero posso

$$A_{1,n} := \{x \in A_1 : \text{dist}(x, \partial A_1) \geq \frac{1}{n}\}$$

e osservo che $A_{1,n} \subset A_1$ per ogni n .

Dico che per n abbastanza grande posso usare $A_{1,n}$ invece di A_1 . Ci sono almeno due dimostrazioni.

• Per assurdo non sia così. Allora per ogni $n \geq 1$ esiste

$$x_n \in A \setminus (A_{1,n} \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots)$$

Dove sta x_n ? Sta in A e non in $A_2, A_3, \dots$, quindi

$$x_n \in A_1$$

Inoltre $x_n \notin A_{1,n}$, quindi $\text{dist}(x_n, \partial A_1) < \frac{1}{n}$.

Ora, a meno di s.succ, $x_n \rightarrow x_\infty \in \overline{A_1} \in A$
 $\uparrow$ compatto

Passando al limite da dist. ho che $x_\infty \in \partial A_1$, ma allora

$x_\infty \notin A_1$ che è aperto, ma allora $x_\infty \in A_2 \cup A_3 \cup \dots$

che però è aperto, e quindi anche x_n per n grande ci sta dentro.

• Posso $B_n := A_{1,n} \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$

Se uno di questi ricopre $\text{clos}(A_1)$ è fatta

Ma questo è un ricoprimento aperto di un compatto.

— o — o —

DIM PARTIZIONE DI UNITÀ

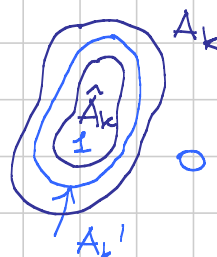
Dato $\{A_k\}$ prendo gli $\{\hat{A}_k\}$ come nel sublemma.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ dico che esiste $\theta_k \in C_c^\infty(A_k)$

che è ≥ 0 e vale 1 su $\hat{A}_k$.

[Fisso $\hat{A}_k \subset A_k' \subset A_k$ e poi prendo

$\mathbb{1}_{A_k'} \neq 0$ per ε piccolo]



Dati tutti i ϑ_k , possiamo

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x) > 0 \quad \text{in } A$$

$\uparrow$ C^∞ perché loc. finita $\nwarrow$ perché $\hat{A}_k$ ricoprono A

e infine

$$\psi_k(x) := \frac{\vartheta_k(x)}{S(x)} \in C_c^\infty(A_k)$$

$\uparrow$ grazie al denominatore
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Dim. Lemma fastidioso Tesi : $u\psi \in W^{m,p}$ Inclusione su u
 $\uparrow$
 C_c^∞

Passo $m=1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\psi D_{x_i}\varphi &= \int_{\Omega} u D_{x_i}[\psi\varphi] - \int_{\Omega} u\varphi D_{x_i}\psi \\ &\quad \uparrow \\ D_{x_i}[\psi\varphi] &= D_{x_i}\psi \cdot \varphi + \psi \cdot D_{x_i}\varphi \\ &= - \int_{\Omega} D_{x_i}u \cdot \psi\varphi - \int_{\Omega} u D_{x_i}\psi \varphi \\ &= - \int_{\Omega} \{ \underbrace{D_{x_i}u \cdot \psi}_{\in L^p} + u \underbrace{D_{x_i}\psi}_{\in L^p} \} \varphi \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\in L^p$
[Seguo corretto dopo video]

$m \Rightarrow m+1$ Sia α con $|\alpha| = m+1$. Tiro fuori un D_{x_i} in modo che

$$D^\alpha = D_{x_i} D^\beta \quad \text{con } |\beta| = m$$

e faccio il conto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\psi D^\alpha\varphi &= \int_{\Omega} u\psi D_{x_i} D^\beta\varphi \\ &= \int_{\Omega} u D_{x_i}(\psi D^\beta\varphi) - \int_{\Omega} u D_{x_i}\psi D^\beta\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{\Omega} \underbrace{D_{x_i} u \cdot \varphi}_{\in W^{m,p}} D^{\beta} \varphi - \int_{\Omega} \underbrace{u \cdot \overbrace{D_{x_i} \varphi}^{\in C^{\infty}}}_{\in W^{m,p}} D^{\beta} \varphi \\
 &= (-1)^{\overbrace{1+|\beta|}^{m+1}} \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi + (-1)^{\overbrace{1+|\beta|}^{m+1}} \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi
 \end{aligned}$$

e questo è quello che volevo.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 29

Note Title

29/10/2019

TEOREMI DI IMMERSIONE

Caso base su tutto lo spazio

$\Omega = \mathbb{R}^d$

 $d \geq 1$ intero, $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Allora ci sono 3 casi.Caso $p < d$ si ha che $u \in L^{p_*}(\mathbb{R}^d)$ dove p_* risolve

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_*} = \frac{1}{d}$$

cioè

$$p_* = \frac{dp}{d-p}$$

e vale la stima

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Disug. pura: al
RHS c'è il solo
gradienteIn particolare $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, p_*]$ e vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, p, q) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

Disug. impura: al
RHS c'è la "full
norm in $W^{1,p}$ "Caso $p = d$ si ha che $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ e

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, q) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

impura

↑↑
esclusoCaso $p > d$ si ha che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, d) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

cupura

Inoltre u è α -Hölderiana con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ (lip. sep $p = +\infty$)
e vale la stima

$$|u(y) - u(x)| \leq \underbrace{C(p, d)}_{\text{costante di } d \text{ Hölder}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

PURA

Caso iterato su tutto lo spazio

$d \geq 1$ intero, $m \geq 1$ intero, $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

Caso $mp < d$ Si ha che $u \in L^{p_*(m)}(\mathbb{R}^d)$ dove

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_*(m)} = \frac{m}{d}$$

$$\text{ossia } p_*(m) = \frac{dp}{d - mp}$$

e vale la stima

$$\|u\|_{L^{p_*(m)}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, m) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{PURA}$$

e in particolare per ogni $q \in [p, p_*(m)]$ vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, q, m) \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\|u\|_{p, m, \mathbb{R}^d}$$

Caso $pm = d$ Si ha che $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ e vale la stima impura

Caso $pm > d$ Si ha che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con stima impura.

Inoltre, se R è il più piccolo intero t.c. $pR > d$, allora $u \in C^{m-R}(\mathbb{R}^d)$ e le sue derivate di ordine $m-R$ sono d -Hölderiane con $\alpha = 1 - \frac{d}{pR}$ e vale la stima pura

$$|D^\beta u(y) - D^\beta u(x)| \leq C(p, m, d) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x - y|^\alpha$$

per ogni $|\beta| = m - R$.

Dim Inclusione a partire dal caso $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. ☺

Caso base su un aperto

$d \geq 1$ intero, $p \in [1, +\infty]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Supponiamo che Ω sia abbastanza regolare.

Allora vale tutto come nel caso base, solo che tutte le stime diventano impure, ad esempio

$p < d$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

↑↑

In particolare vale stima simile per $\|u\|_{L^q(\Omega)}$ per ogni $q \in [p, p^*]$ (e anche $q \in [1, p^*]$ se $\text{meas}(\Omega) < +\infty$)

$p = d$

Stessa cosa con tutti i $q \in [p, +\infty)$

↑↑ escluso

$p > d$

Immersione in $L^\infty(\Omega)$ e α -Hölderianità
con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ e stima impura della costante
di Hölder.

— o — o —

Caso iterato su un aperto

Tutto come previsto, solo che
tutte le stime sono impure.

— o — o —

Oss. Senza regolarità non c'è speranza.

PROBLEMA DELL'ESTENSIONE

Setting: $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$, $m \geq 1$ intero.

Def. ① Un (p, m) -extender è una funzione LINEARE

$$E_{p,m} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$$

tale che

$$(i) [E_{p,m}(u)](x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{quasi ogni})$$

(ii) esiste una costante $C(p, m)$ tale che

$$\|E_{p,m}(u)\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq C(p, m) \|u\|_{m,p,\Omega}$$

② Un u -extender è una funzione lineare

$$E_u : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$$

che ristretta ad ogni $W^{m,p}(\Omega)$ diventa un (m, p) -extender.

③ Un total extender è una funzione lineare come sopra che va bene per ogni (p, m) ammissibile

— o — o —

Fatto base 1 Se Ω ammette $u_1(p)$ -extender, allora vale l'approx. deluxe in $W^{u,p}(\Omega)$.

Dim. Prendo $u \in W^{u,p}(\Omega)$, pongo $\hat{u} := E_{u,p}(u) \in W^{u,p}(\mathbb{R}^d)$
Per approssimazione (basta la low-cost?) esiste

$$\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

tale che

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

$$D^d u_n \rightarrow D^d u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

e restringendo tutto a Ω ho la tesi. $\nearrow$ (sistemazione nel prossimo futuro)
— o — o —

Fatto base 2 Se Ω ammette $u_1(p)$ -extender, allora valgono le immersioni in Ω , anche quelle iterate con m .
(basta $u_1(p)$ per avere quelle di ordine qualunque)

Dim. Prendo $u \in W^{u,p}(\Omega)$, la estendo a $\hat{u} \in W^{u,p}(\mathbb{R}^d)$ e uso le immersioni per questa.
In formule

$$\|u\|_{L^{p*}(\Omega)} = \|\hat{u}\|_{L^{p*}(\Omega)} \leq \|\hat{u}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^d)}$$

$\uparrow$ $u = \hat{u}$ su Ω $\uparrow$ insieme più grande

$$\leq c(p,d) \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c(p,d,\Omega) \|u\|_{u,p,\Omega}$$

$\uparrow$ immersione base $\uparrow$ stima per l' $(1,p)$ -extender

Discorso analogo per tutte le altre stime.

Il caso con $W^{u,p}$ si dimostra per induzione su m a partire da $m=1$.
— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 30

Note Title

29/10/2019

Lemma (GAGLIARDO 1959) (caso particolare di disug. di BRASCAMP-LIEB)

Sia $d \geq 2$ un intero.

Per ogni $i = 1, \dots, d$ sia $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$

e sia $P_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ la proiezione che dimentica la componente i -esima.

Poniamo

$$\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(P_i x)$$

Allora vale la stima

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

Tocchiamo con mano:

$$d=2 \quad \varphi(x, y) = \varphi_1(y) \varphi_2(x)$$

$$d=3 \quad \varphi(x, y, z) = \varphi_1(y, z) \varphi_2(x, z) \varphi_3(x, y)$$

Dim Induzione su d . Wlog assumo $\varphi_i \geq 0$

$d=2$ Facile

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(y) \varphi_2(x) dx dy = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(y) dy \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) dx \right\}$$

Per capire il passo induttivo, facciamo esplicitamente il caso da $d=3$ a $d=4$.

In questo caso

$$\varphi(x, y, z, w) = a(y, z, w) b(x, z, w) c(x, y, w) d(x, y, z)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x, y, z, w) dx dy dz dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} a(y, z, w) b(x, z, w) c(x, y, w) dw \right)}_{\Phi(x, y, z)} dx dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z)^{\frac{1}{3}} \Phi(x, y, z)^{\frac{2}{3}} dx dy dz$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z)^3 dx dy dz \right\}^{1/3}}_{\|d\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \text{ ☺}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \right\}^{2/3}}_{\text{resto}}$$

Basta dimostrare che $\text{resto} \leq \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|b\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|c\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$
 Ora

$$\Phi(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^{\frac{1}{3}} b(x, z, w)^{\frac{1}{3}} c(x, y, w)^{\frac{1}{3}} dw$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}} b^3 \dots \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}} c^3 \dots \right\}^{1/3}$$

Elevo alla $3/2$ e ottengo

$$\Phi(x, y, z)^{3/2} \leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right\}^{1/2}}_{A(y, z)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} b^3 dw \right\}^{1/2}}_{B(x, z)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} c^3 dw \right\}^{1/2}}_{C(x, y)}$$

Ora devo fare

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \leq \int_{\mathbb{R}^3} A(y, z) B(x, z) C(x, y) dx dy dz$$

Usando l'ipotesi induttiva

$$\text{LHS} \leq \text{RHS} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(y, z)^2 dy dz \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} B^2 \dots \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} C^2 \dots \right)^{1/2}$$

Ora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} A(y, z)^2 dy dz &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right) dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} a(y, z, w)^3 dy dz dw \\ &= \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 \end{aligned}$$

Il cubo devo elevarlo alla $\frac{1}{2}$ e poi alla $\frac{2}{3}$ 😊

Vero passo induttivo $d \Rightarrow d+1$ $x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$

Indico con $\hat{x}_i$ quello privato della componente i
 $\hat{x}_{i, d+1}$ " " delle componenti i e $d+1$.

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \prod_{i=1}^{d+1} \varphi_i(\hat{x}_i) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i) dx_{d+1} \right)}_{\Phi(\hat{x}_{d+1})} d\hat{x}_{d+1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) \underbrace{\Phi(\hat{x}_{d+1})}_{\frac{d-1}{d}} d\hat{x}_{d+1}$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1})^d d\hat{x}_{d+1} \right\}^{1/d}}_{\| \varphi_{d+1} \|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \text{ 😊}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} d\hat{x}_{d+1} \right\}^{\frac{d-1}{d}}}_{\text{resto}}$$

Come prima serie

$$\text{resto} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$$

Ora

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{x}_{d+1}) &= \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i) d x_{d+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi_1(\hat{x}_1)}_{\frac{1}{d}} \dots \underbrace{\varphi_d(\hat{x}_d)}_{\frac{1}{d}} d x_{d+1} \\ &\leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d x_{d+1} \right\}^{1/d} \end{aligned}$$

Elevando

$$\Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} \leq \underbrace{\prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d x_{d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}}}_{\Phi_i(\hat{x}_{i,d+1})}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} d \hat{x}_{d+1} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d \Phi_i(\hat{x}_{i,d+1}) d \hat{x}_{d+1} \\ &\stackrel{\text{(ipotesi induttiva)}}{\leq} \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Phi_i(\hat{x}_{i,d+1})^{d-1} d \hat{x}_{i,d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}} \end{aligned}$$

Ora basta osservare che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Phi_i(\hat{x}_{i,d+1})^{d-1} d \hat{x}_{i,d+1} &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d x_{d+1} d \hat{x}_{i,d+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d \hat{x}_i \end{aligned}$$

Basta osservare che gli esponenti se si va no.

Osservazioni in stile riscalamento

Proviamo le immersioni per $p < d$:

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Se questa vale, allora per forza p_* è quello dato dalla formula.

Se vale per $u(x)$, vale per $\lambda u(x)$.

Se vale per $u(x)$, deve valere pure per $u(\lambda x)$. Come riscaliamo in funzione di λ , LHS e RHS?

$$\begin{aligned} \|u(\lambda x)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u(\lambda x)^q dx \right\}^{1/q} & \lambda x = y \\ &= \left\{ \frac{1}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)^q dy \right\}^{1/q} & dx = \frac{1}{\lambda^d} dy \\ &= \lambda^{-\frac{d}{q}} \|u(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Per il RHS osserviamo che $\nabla[u(\lambda x)] = \lambda \nabla u(\lambda x)$ e quindi

$$\begin{aligned} \|\nabla[u(\lambda x)]\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\lambda|^p \|\nabla u(\lambda x)\|^p dx \right\}^{1/p} \\ &= \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Ma allora LHS $\leq$ RHS diventa

$$\lambda^{-\frac{d}{q}} \|u(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Portandolo tutto dalla stessa parte viene

$$\lambda^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}} \|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

Se l'esponente di λ è $\neq 0$, allora ho guai per $\lambda \rightarrow 0^+$ o per $\lambda \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\frac{d}{p} = 1 + \frac{d}{q}, \text{ cioè } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d} \quad \text{😊}$$

Con un ragionamento analogo si trova l'ordine di Hölderianità per $p > d$.

Allo stesso modo si fanno i controesempi alle disug. impure quando siamo fuori dal range.

Esercizio Vale una disug. del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x,y) b(y,z) dx dy dz \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

Se funziona per $a(x,y)$ e $b(y,z)$, deve funzionare

- per $a(\lambda x, y)$ e $b(y, z)$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda^{1/p}} \rightsquigarrow p=1$
- per $a(x, y)$ e $b(y, \lambda z)$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda^{1/q}} \rightsquigarrow q=1$
- per $a(x, \lambda y)$ e $b(\lambda y, z)$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \rightsquigarrow \text{☹}$

[Aggiunto dopo video: l'esercizio era capire se vale la disuguaglianza e la risposta è negativa perché i 3 diversi riscalamenti danno condizioni incompatibili su p e q]

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 31

Note Title

31/10/2019

Lemma (Approx. deluxe in tutto $\mathbb{R}^d$)Se $p < +\infty$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora esiste $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$
- $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$

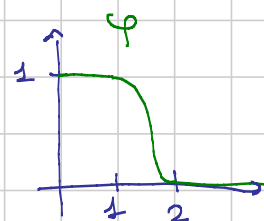
Dim. Obiettivo: data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e dato $\varepsilon > 0$, trovare $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c. $\|u - v\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$

Si fa in due step.

Step 1 Sistemiamo il supp. cpt., cioè trovo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ma a supp. cpt. t.c.

$$\|u - w\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Considero una cutoff come in figura e pongo



$$u_n(x) := u(x) \cdot \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

Osservo che $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ (Sobolev. C_c^∞) e ha $\text{Supp} \subseteq B(0, 2n)$ e che

$$\begin{aligned} u_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{puntuale dominata,} \\ \nabla u_n(x) &\rightarrow \nabla u(x) && \text{quindi in } L^p(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Basta prendere $w = u_n$ per n grande.

Step 2 Trovo $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c. $\|w - v\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

Basta porre $v = w * \rho_n$ con ρ mollif. e n piccolo.

Oss. Lo stesso vale in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione immersioni per $p < d$ $p_* = \frac{pd}{d-p}$

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d,p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

Step 1 $p=1$ e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) dt$$

↑
fatto perché u è nulla definit.

da cui

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right| dt \\ &=: \varphi_1(x_2, \dots, x_d) \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \right| dt \\ &=: \varphi_i(\hat{x}_i) \end{aligned}$$

Desidero che

$$|u(x)| \leq \prod_{i=1}^d \underbrace{\varphi_i(\hat{x}_i)}_{\uparrow \text{funzioni } C_c^0(\mathbb{R}^{d-1})}^{\frac{1}{d}}$$

Elevo tutto alla $\frac{d}{d-1} = 1*$ e ottengo

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)^{\frac{1}{d-1}}$$

Per la disug. di Gagliardo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i) d\hat{x}_i \right\}^{\frac{1}{d-1}}$$

Calcolo gli integrali al RHS e ottengo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i) d\hat{x}_i &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\hat{x}_i \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, \underbrace{t}_{\hat{x}_i}, \dots, x_d) \right| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Alla fine viene

$$\text{LHS} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d}{d-1}}$$

Portando l'esponente a sx ho finito.

Step 2 ϕ generico e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$$\text{Pongo } v(x) := |u(x)|^2 u(x) = \varphi(u(x))$$

$\uparrow \varphi(\sigma) = |\sigma|^2 \sigma$

$$\text{Ossemo che } \nabla v(x) = \varphi'(u(x)) \nabla u(x)$$

$$\varphi'(\sigma) = 2|\sigma|^2 = 2|u(x)|^2 \nabla u(x)$$

Applico caso $p=1$ alla $u(x)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{1*}} &\leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ \|u\|_{L^{(n+1)\frac{d}{d-1}}} &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{(n+1)d}{d-1}} dx \right\}^{\frac{d-1}{d}} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{p-1}{p}} |\nabla u(x)| dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rp}{p-1}} dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p dx \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Riscrivo in termini di norme

$$\left\{ \|u\|_{L^{(n+1)\frac{d}{d-1}}} \right\}^{n+1} \leq \left\{ \|u\|_{L^{\frac{rp}{p-1}}} \right\}^n \|\nabla u\|_{L^p}$$

Scelgo n in modo che le norme di u siano nello stesso spazio

$$\begin{aligned} (n+1)\frac{d}{d-1} &= \frac{rp}{p-1} \quad ; \quad n\left(\frac{d}{d-1} - \frac{p}{p-1}\right) = -\frac{d}{d-1} \\ n \frac{\cancel{dr} - d - \cancel{dp} + p}{(\cancel{d-1})(p-1)} &= -\frac{d}{\cancel{d-1}} \quad ; \quad n = \frac{(p-1)d}{d-p} \end{aligned}$$

da cui

$$(n+1)\frac{d}{d-1} = \frac{rp}{p-1} = \frac{(p-1)d}{d-p} \frac{p}{\cancel{p-1}} = \frac{dp}{d-p} = p_*$$

Semplificando n ho la tesi.

Step 3 p generico, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Uso approx. deluxe con succ.

$$\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Per la approx. vale che

$$\|u_m\|_{L^{p^*}} \leq C(p, d) \|\nabla u_m\|_{L^p}$$

So che $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$, quindi è succ. di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Ma allora $\{u_m\}$ è di Cauchy in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$, e quindi

$$\left. \begin{array}{ll} u_m \rightarrow u & \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \\ u_m \rightarrow \hat{u} & \text{in } L^{p^*}(\mathbb{R}^d) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ma } u = \hat{u} \text{ perché a} \\ \text{meno di s.succ. la} \\ \text{conv. è punt. q.o.} \end{array}$$

Caso limite $p = d$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d, q) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d} \quad \forall q < +\infty$$

(e $q \geq p$)

Dim Basta farlo per le $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Riparto dalla disug. prec. con $p = d$

$$\left\{ \|u\|_{L^{(n+1)\frac{p}{p-1}}} \right\}^{n+1} \leq \left\{ \|u\|_{L^{n\frac{p}{p-1}}} \right\}^n \|\nabla u\|_{L^p}$$

Lo spazio al LHS è meglio di quello al RHS, quindi posso sperare di iterare il procedimento.

Dimostro per induzione che

$$u \in L^{p + \frac{kp}{p-1}}(\mathbb{R}^d) \quad p_k := p + \frac{kp}{p-1}$$

con disuguaglianza cupura.

Passo base $k=0$ Ipotesi $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (già qui la disug. è cupura)

Passo $k \Rightarrow k+1$ Basta fare in modo che $\frac{kp}{p-1} = p_k$

$$\frac{\lambda p}{p-1} = \phi + \frac{k p}{p-1} ; \quad \lambda = \frac{p-1}{p} \left(p + \frac{k p}{p-1} \right) = p-1+k \quad \text{😊}$$

A questo punto al LHS mi ritrovo come esponente p_{k+1} ,

$$\|u\|_{L^{p_{k+1}}}^{\lambda+1} \leq \|u\|_{L^{p_k}}^{\lambda} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{stima impura} \\ \text{per ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{\leq} C(p, d, k) \|u\|_{L^{p, \mathbb{R}^d}}^{\lambda} \underbrace{\|\nabla u\|_{L^p}}_{\leq \|u\|_{L^{p, \mathbb{R}^d}}}$$

Basta estrarne radice $(\lambda+1)$ -esima
 — o — o —

Oss. Provando a scrivere esplicitamente le costanti, si vede che divergono quando $k \rightarrow +\infty$ ($q \rightarrow +\infty$)

Oss. L'impurezza nasce nel passo base, il passo induttivo sarebbe puro.
 — o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 32

Note Title

31/10/2019

Immersioni per $p > d$ (MORREY) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(p, d) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha \quad \alpha = 1 - \frac{d}{p}$$

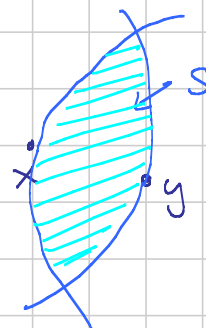
Dim Step 1 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e dimostro che u è α -Hölder con stima.

TRUCCO ZONA DI SCAMBIO

Pongo $\delta := |y - x|$

Pongo

$$S := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$$



$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u(z)| + |u(z) - u(x)| \quad \forall z \in S$$

Integro su S in dz :

$$\begin{aligned} \int_S |u(y) - u(x)| dz &= |u(y) - u(x)| \text{meas}(S) \\ &= |u(y) - u(x)| C_1(d) \delta^d \end{aligned}$$

Integro uno dei 2 termini al RHS

$$\begin{aligned} |u(z) - u(x)| &= |\varphi(1) - \varphi(0)| \\ &= \left| \int_0^1 \varphi'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_0^1 |\langle \nabla u(x + t(z-x)), z-x \rangle| dt \end{aligned}$$

$\varphi(t) := u(x + t(z-x))$
= segmento da x a z

da cui

$$|u(z) - u(x)| \leq \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| \cdot |z-x| dt$$

Integro in dz

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| dz &\leq \int_S dz \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| \cdot \underbrace{|z-x|}_{\leq \delta} dt \\ &\leq \delta \int_0^1 dt \int_S |\nabla u(x + t(z-x))| dz \end{aligned}$$

$t^d dy = dz$

$$\leq \delta \int_0^1 dt \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(y)| \frac{1}{t^d} dy$$

dove varia y ?

$$y - x = t(z - x)$$

$$|y - x| = t|z - x| \leq t\delta \Rightarrow y \in B(x, t\delta)$$

$$= \delta \int_0^1 \frac{1}{t^d} dt \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(y)| \cdot \frac{1}{t^{\frac{p-1}{p}}} dy$$

$$\leq \delta \int_0^1 \frac{1}{t^d} dt \left\{ \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(y)|^p dy \right\}^{1/p} \left\{ \text{meas } B(x, t\delta) \right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$\leq \|\nabla u\|_{L^p}$

$$\leq \delta \|\nabla u\|_{L^p} \int_0^1 \frac{1}{t^d} C_2(d, p) t^{d \frac{p-1}{p}} \delta^{d \frac{p-1}{p}} dt$$

$$\leq C_2(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} \delta^{1+d-\frac{d}{p}} \int_0^1 \frac{1}{t^d} t^{d-\frac{d}{p}} dt$$

$$= C_3(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} \delta^{1+d-\frac{d}{p}} \int_0^1 \frac{1}{t^{d/p}} dt$$

Mettendo insieme LHS e RHS otteniamo

$$|u(y) - u(x)| C_1(d) \leq C_3(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} |y-x|^{1+\frac{d}{p}-1}$$

da cui

$$|u(y) - u(x)| \leq C_4(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} |y-x|^{1-\frac{d}{p}}$$

Step 2 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e ottengo che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con stima

più senza una stima puntuale che mi procuro con teo. media integrale.

Dato $x \in \mathbb{R}^d$, osservo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p dx \geq \int_{B(x, 3r)} |u(x)|^p dx = \text{meas}(B(x, 3r)) \cdot |u(\tilde{x})|^p$$

p.to. medio

da cui

$$|u(\tilde{x})| \leq C(p, d) \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Ora come al solito

$$|u(x)| \leq |u(\tilde{x})| + \overbrace{|u(x) - u(\tilde{x})|}^{\text{stima Hölder}}$$

$$\leq C(p, d) \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C_2(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot 3r^{1-\frac{d}{p}}$$

da cui dei tesi.

Step 3 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ Approssimo deluxe con $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e osservo che le u_n sono equi-Hölder ed equilim, quindi convergono unif. sui compatti (ad u).

Esercizio Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $p > d$, allora

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0.$$

Dim. Analisi 1: se un integrale improprio su $\mathbb{R}^d$ converge e la funz. è unif. continua, allora tende a 0. (dim. ricordata nel video)
 Lo applico a $|u(x)|^p$ che ha int. impr. conv. ed è Hölder perché potenza di funzione Hölder + limitata.
 — o — o —

Esercizio Dimostrare che esiste $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $p < d$ che non tende a 0 all'infinito.

Dim. Trucco di riscalamento.

- Prendo $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$
- Prendo una successione $x_n \rightarrow +\infty$ abbastanza spaziosa $|x_m - x_n| \geq 2$
- Considero

$$B(x_n, \frac{1}{n})$$

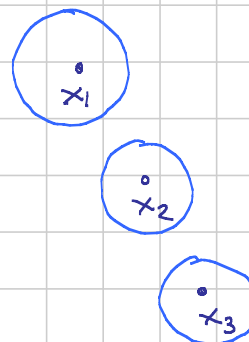
e ci metto dentro una riscalata di φ

$$u_n(x) := \varphi((x - x_n)n)$$

e pongo
$$u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Vediamo se converge da qualche parte

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{B(x_n, \frac{1}{n})} \underbrace{\varphi((x - x_n)n)}_y^p dx \\ &\quad dy = n^d dx \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{1}{n^d} \varphi(y)^p dy \end{aligned}$$



e quindi la relativa serie converge e quindi $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{B(x_m, \frac{1}{m})} n^p |\nabla \varphi((x-x_m)m)|^p dx \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{n^p}{m^d} |\nabla \varphi(y)|^p dy \\ &= \frac{1}{m^{\frac{d}{p}-1}} \int_{B(0,1)} |\nabla \varphi(y)|^p dy \end{aligned}$$

Elevando alla $\frac{1}{p}$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \text{cost} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{p}-1}}$$

che converge quando $d > 2p$ 😞

Come aggiusto le cose se $d > p$? Usando raggi del tipo $\frac{1}{m^a}$

Mi ritrovo $\frac{1}{n^{a(\frac{d}{p}-1)}}$ che converge se $a(\frac{d}{p}-1) > 1$
da cui trovo a
— 0 — 0 —

Altro costruttore di controesempi: funzioni radiali

Data $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pongo $u(x) := f(|x|)$

Fatto generale $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |f(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$

$\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |f'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$
↑ fone verifica in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$

Un discorso analogo vale per $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$
e ovviamente se sono in $B(0,R)$ mi riduco a fare

$$\int_0^R \dots r^{d-1} dr$$

Domanda: $\frac{1}{r^a} \in W^{1,p}(B(0,1))$ per quali p ?

$$\bullet \int_0^R \frac{1}{r^{ap}} r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow ap - d + 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow ap < d \Leftrightarrow p < \frac{d}{a}$$

$$\bullet \int_0^R \frac{1}{r^{(a+1)p}} r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow$$

$$p < \frac{d}{a+1}$$

implica l'altra
e assicura l'appartenenza
a $W^{1,p}$

— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 33

Titolo nota

04/11/2019

TEOREMI DI ESTENSIONE

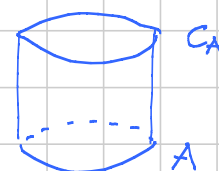
Motivazioni : $\rightarrow$ teo. approx. deluxe } aperto con $\partial\Omega$ regolare
 $\rightarrow$ teo. immersione

Caso modello $\leadsto$ cilindriCaso generale $\leadsto$ aperto con $\partial\Omega$ regolare

Setting $d \geq 1$ intero $A \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ aperto

$$C_A := A \times (-1, 1) \text{ aperto in } \mathbb{R}^d$$

(x, y)
 $x = (x_1, \dots, x_{d-1})$



$$C_A^+ := A \times (0, 1) \quad \text{semicilindro}$$

Analogamente possiamo definire cilindri "infiniti"

$$C_A := A \times \mathbb{R} \quad C_A^+ := A \times (0, +\infty)$$

Obiettivo: estendere una funzione da C_A^+ a tutto C_A

$$[E_P u](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } x \in A \quad y \in (0, 1) \\ u(x, -y) & \text{se } x \in A \quad y \in (-1, 0) \end{cases}$$

per $\uparrow$ parità

$$[E_D u](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } x \in A \quad y \in (0, 1) \\ -u(x, -y) & \text{se } x \in A \quad y \in (-1, 0) \end{cases}$$

per $\uparrow$ disparità

Teorema E_p è un $(1,p)$ -estender per ogni $p \in [1, +\infty]$ ↑ incluso
 cioè
 se $u \in W^{1,p}(C_A^+)$ allora $E_p u \in W^{1,p}(C_A)$
 Inoltre vale la stima

$$\|E_p u\|_{1,p,C_A} \leq 2 \|u\|_{1,p,C_A^+}$$

↑ forse =

e

$$D_{x_i}(E_p u) = E_p(D_{x_i} u) \quad \text{per } i = 1, \dots, d-1$$

$$D_y(E_p u) = E_D(D_y u)$$

Dim Facciamo le due verifiche separate

Caso D_{x_i} Devo dimostrare che

$$\int_{C_A} E_p u(x,y) D_{x_i} \varphi(x,y) dx dy = - \int_{C_A} E_p D_{x_i} u(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(C_A)$.

$$\text{LHS} = \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) D_{x_i} \varphi(x,y)$$

$$+ \int_A dx \int_{-1}^0 dy u(x,-y) D_{x_i} \varphi(x,y)$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) D_{x_i} \varphi(x,-y)$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) \{ D_{x_i} \varphi(x,y) + D_{x_i} \varphi(x,-y) \}$$

$$\text{Pongo } \psi(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(x,-y)$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) D_{x_i} \psi(x,y) = \int_{C_A^+} u D_{x_i} \psi dx dy$$

↑ parte alta

RHS = ... stessi conti...

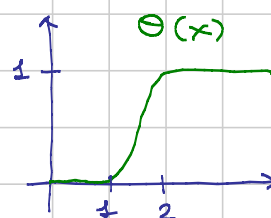
$$= - \int_{C_A^+} D_{x_i} u(x,y) \psi(x,y) dx dy$$

Mi sono ridotto a dimostrare che

$$\int_{C_A^+} u(x,y) D_{x_i} \psi(x,y) = - \int_{C_A^+} D_{x_i} u(x,y) \psi(x,y)$$

Sembrerebbe la definizione di $u \in W^{1,p}(C_A^+)$, ma non è così perché ψ non ha supporto compatto in C_A^+ , ma solo in C_A .

Serve approssimare. Prendo $\theta(x)$ come in figura e pongo, per $k \geq 1$:



$$\psi_k(x,y) := \psi(x,y) \theta(ky)$$

Osservo che $\psi_k \in C_c^\infty(C_A^+)$ e quindi per ogni $k \geq 1$ vale

$$\int_{C_A^+} u(x,y) D_{x_i} \psi_k(x,y) dx dy = - \int_{C_A^+} D_{x_i} u(x,y) \psi_k(x,y) dx dy$$

e ora vorrei passare al limite. Posso perché

- al RHS ho conv. puntuale dominata $\psi_k(x,y) \rightarrow \psi(x,y)$
- al LHS invece pure perché

$$D_{x_i} \psi_k(x,y) = [D_{x_i} \psi(x,y)] \cdot \underbrace{\theta(ky)}_{\substack{\uparrow \text{Non viene toccato dalla } D_{x_i}}}$$

Caso D_y Analogamente a prima

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{C_A} u(x,y) D_y \varphi(x,y) dx dy \\ &= \int_{C_A^+} u(x,y) \{ D_y \varphi(x,y) + D_y \varphi(x,-y) \} dx dy \\ &= \int_{C_A^+} u(x,y) D_y \psi(x,y) dx dy \end{aligned}$$

dove $\psi(x,y) := \varphi(x,y) - \varphi(x,-y)$
 $\uparrow$ diverso da prima

Analogamente

$$\text{RHS} = - \int_{C_A^+} D_y u(x,y) \cdot \psi(x,y) dx dy$$

(i segni sono aggiustati da avere $E_y D_y u$ al RHS).

Ancora una volta devo dim. che

$$\int_{C_A^+} u D_y \psi = - \int_{C_A^+} D_y u \cdot \psi$$

che sarebbe ovvio se $\psi \in C_c^\infty(C_A^+)$. Osservo che ora ψ si annulla quando $y=0$, ma non basta ancora.

Prendo le ψ_k come prima, e spero di passare a lim.

$$\int_{C_A^+} u D_y \psi_k = - \int_{C_A^+} D_y u \cdot \psi_k$$

Il RHS funziona come prima (puntuale dominata).

A LHS abbiamo due termini

$$\underbrace{\int_{C_A^+} u(x,y) D_y \psi(x,y) \cdot \Theta(ky)}_{\text{come prima}} + \int_{C_A^+} u(x,y) \psi(x,y) \cdot k \Theta(ky)$$

Per il secondo termine osserviamo che ψ è Lip. in C_A^+ perché ha gradiente limitato, e si annulla per $y=0$, quindi

$$|\psi(x, y)| \leq L y \quad \text{per } (x, y) \in C_A^+$$

Osservo anche che $\tilde{\theta}(ky) \equiv 0$ appena $ky \geq 2$, cioè per $y \geq \frac{2}{k}$ e quindi

$$\left| \int_{C_A^+} u(x, y) \psi(x, y) k \tilde{\theta}(ky) dx dy \right|$$

$$\leq \int_A dx \int_0^{\frac{2}{k}} |u(x, y)| \cdot L y \cdot k \underbrace{|\tilde{\theta}(ky)|}_{\leq M} dy$$

$\leq \frac{2}{k}$

$$\leq LM \cdot 2 \underbrace{\int_A dx \int_0^{\frac{2}{k}} |u(x, y)| dy}_{\downarrow 0 \text{ per conv. puntuale dominata}}$$

— 0 — 0 —

Oss. Non stiamo dicendo che l'int. per parti vale in C_A^+ anche quando ψ non ha supporto compatto.

Se mettessimo i termini di bordo

- nel caso di x_i verrebbero 0 perché la direzione x_i è tangenziale rispetto al tratto di bordo su cui $\psi \neq 0$
- nel caso di Dy verrebbero 0 perché ψ si annulla per $y=0$.

— 0 — 0 —



Lemma #1 dell'estensione: bordi BILATERI, ad esempio non posso estendere da $\underbrace{(-1,0) \cup (0,1)}_{\Omega}$ ad $\mathbb{R}$

La funzione a lato sta in $W^{1,p}(\Omega)$,
ma non è estendibile Sobolev a tutto $\mathbb{R}$.



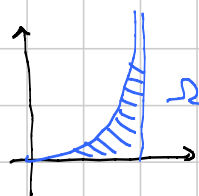
Stesso discorso in $\mathbb{R}^2$ con $\Omega =$ quadrato - asse

Lemma #2 dell'estensione: cuspidi o restringimenti

Esempio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^{20}\}$

Facile esercizio di analisi 2 che

$$u(x,y) = \frac{1}{x} \text{ sta in } W^{1,p}(\Omega)$$



per alcuni p abbastanza grandi. (facile verifica per $p=4$)

Questa non è estendibile a tutto $\mathbb{R}^2$ come funzione $W^{1,4}$,
perché per immersione dovrebbe stare in L^∞ .

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 34

Titolo nota

04/11/2019

Def. (Aperto con bordo di classe C^1 compatto)Sia $d \geq 1$ intero. Poniamo

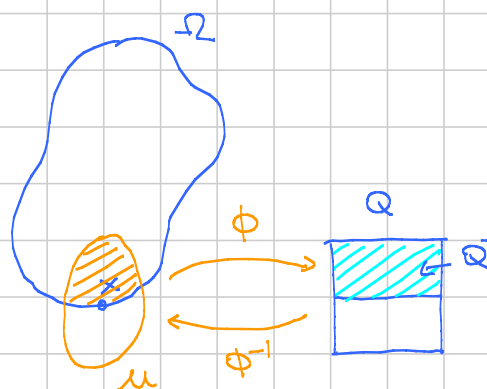
$$Q := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, |y| < 1 \}$$

↑
prime $d-1$ variabili

$$Q^+ := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, 0 < y < 1 \}$$

Consideriamo aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ tali che

- $\partial\Omega$ è compatto
- per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x ed esiste $\phi: U \rightarrow Q$ tale che
 - (i) ϕ è invertibile
 - (ii) ϕ e ϕ^{-1} sono di classe C^1
 - (iii) J_ϕ e $J_{\phi^{-1}}$ sono limitati
 - (iv) $\phi(U \cap \Omega) = Q^+$
 - (v) $\phi(U \cap \partial\Omega) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1 \text{ e } y = 0 \}$



Teorema Se Ω è come nella definizione, allora esiste un'estensione da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Partizione dell'unità (tipo B) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto con $\partial\Omega$ compatta.

Sia $A_1, \dots, A_n$ un ricoprimento aperto finito di $\partial\Omega$.Poniamo $A_0 := \Omega$.Allora esistono funzioni $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

↑
c'è anche lui

che verificano le seguenti proprietà

- (i) sono di classe C^∞
- (ii) $0 \leq \psi_i(x) \leq 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
- (iii) il supporto di $\psi_i(x)$ è ben contenuto in A_i per ogni $i = 1, \dots, n$
- (iv) per $i = 0$ il supporto di $\psi_0(x)$ ha distanza positiva da $\partial\Omega$
- (v) vale

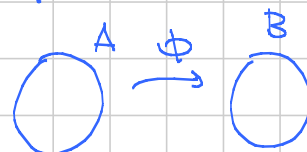
$$\sum_{i=0}^n \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \text{Clos}(\Omega)$$

Prop. (Composizione dentro) Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^d$ (con lo stesso d) e sia $\Phi: A \rightarrow B$ t.c.

- (i) è invertibile
 - (ii) Φ e Φ^{-1} sono di classe C^1
 - (iii) J_Φ e $J_{\Phi^{-1}}$ sono limitati
- } in A per Φ
} in B per Φ^{-1}

Sia $u: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora per ogni $p \in [1, +\infty]$ vale



$$u \in W^{1,p}(B) \iff u \circ \Phi \in W^{1,p}(A)$$

e le derivate parziali sono quelle che uno si aspetta

$$\frac{\partial [u \circ \Phi]}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Phi(x)) \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x)$$

↖ componente j -esima

o in notazione vettoriale $\nabla(u \circ \Phi) = \nabla u \cdot J_\Phi$

In particolare esistono $m > 0$ e $M > 0$ t.c.

$$m \|u\|_{1,p,B} \leq \|u \circ \Phi\|_{1,p,A} \leq M \|u\|_{1,p,B}$$

Dim. to. estensione data della proposizione

Ricopro $\partial\Omega$ con aperti M_i come nella definizione di bordo C^1 .

Estraggo s. ricopr. finito

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^m M_i$$

Prendo la corrispondente partizione di 1 di tipo B che chiamo ψ_i ($i = 0, 1, \dots, m$).

Pongo

$$\mu_i(x) := \mu(x) \cdot \psi_i(x)$$

e osservo che

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^m \mu_i(x)$$

e che ogni $\mu_i(x)$ ha supporto contenuto nel rispettivo M_i .

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ considero la corrispondente ϕ_i e pongo

$$v_i(x) = \mu_i(\phi_i^{-1}(x)) \quad \text{su } Q^+$$

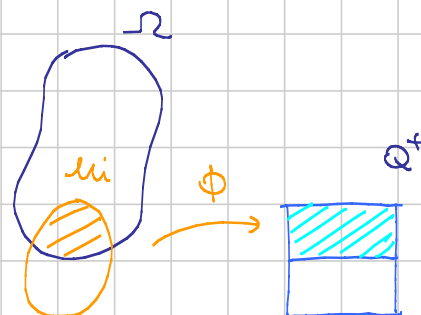
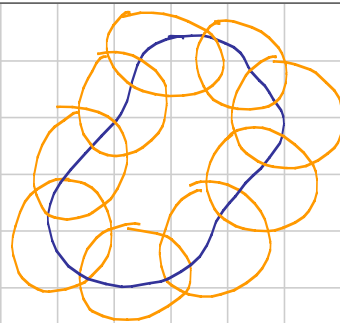
$$\hat{v}_i(x) := E_p v_i(x) \quad \text{su } Q \leftarrow \hat{v}_i \text{ ha supp. compatto in } Q$$

$$\hat{\mu}_i(x) := \hat{v}_i(\phi_i(x)) \quad \text{su } M_i \leftarrow \hat{\mu}_i \text{ ha supp. compatto in } M_i$$

quindi la posso pensare definita su tutto $\mathbb{R}^d$.

Alla fine pongo

$$\hat{\mu}(x) := \mu_0(x) + \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i(x)$$



Dico che $\hat{u}_i(x)$ estende $u_i(x)$ e sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con costante controllata.

- L'estensione è quasi ovvia perché

$$u_i(x) = \hat{u}_i(x) \quad \text{in } u_i \cap \Omega$$

- Le costanti si controllano perché

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_i\|_{1,p,u_i} &\leq C_1 \|\hat{u}_i\|_{1,p,Q} \quad (\text{Prop}) \\ &\leq C_1 \cdot 2 \|u_i\|_{1,p,Q^+} \quad (\text{caso alimodhi}) \\ &\leq C_1 \cdot 2 \cdot C_2 \|u_i\|_{1,p,u_i \cap \Omega} \quad (\text{Prop}) \\ &\leq C_1 \cdot 2 \cdot C_2 \cdot C_3 \|u\|_{1,p,\Omega} \quad (u_i = u \cdot \psi_i) \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Una partizione di 1 $A_1, \dots, A_n$ ric. di $\partial\Omega$, $A_0 := \Omega$

Step 1 Si può risparmiare sul ricoprimento, cioè ponendo

$$A_{i,k} := \{x \in A_i : \text{dist}(x, \partial A_i) > \frac{1}{k}\}$$

si verifica che per k abbastanza grande vale che

$$\bigcup_{i=0}^n A_{i,k} \supseteq \text{Clos}(\Omega)$$

(Facile esercizio come nel tipo A)

Preso un k buono, indico con $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n$ gli aperti risparmiati che ricoprono ancora.

- Step 2** Per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esiste θ_i di classe C^∞ a valori in $[0, 1]$ tale che
- $\theta_i(x) \equiv 1$ in $\hat{A}_i$
 - $\text{Supp } \theta_i \subseteq A_i$

Step 3 Poniamo

$$\psi_0(x) := \theta_0(x)$$

$$\psi_1(x) := \theta_1(x) (1 - \theta_0(x))$$

$$\psi_2(x) := \theta_2(x) (1 - \theta_0(x)) (1 - \theta_1(x))$$

$\vdots$

$$\psi_i(x) := \theta_i(x) \prod_{k=0}^{i-1} (1 - \theta_k(x))$$

Dico che queste vanno bene. Regolarità, supporti, valori in $[0, 1]$ sono evidenti.

La somma 1 segue dalla relazione

$$1 - \sum_{i=0}^n \psi_i(x) = \prod_{i=0}^n (1 - \theta_i(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Ogni $x \in \text{Clos}(\Omega)$ sta in qualche $\hat{A}_i$ e quindi $\theta_i(x) = 1$ rendendo nullo il prodotto.

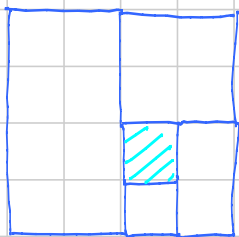
La relazione decisiva è un caso particolare di

$$1 - \sum_{i=0}^k \psi_i(x) = \prod_{i=0}^k (1 - \theta_i(x))$$

che vale per induzione per ogni $k = 0, 1, \dots, n$

Achtung! Il truccetto di definire $\psi_i(x) = \frac{\theta_i(x)}{\theta_0 + \dots + \theta_n}$

qui NON funziona!!! Nel caso di tipo A non c'erano confini tra un A_i e "il nulla" (spiegazione nel video).

Extender per il rettangolo alla Bressi

Con numero finito di riflessioni
estendo ad un intorno del
rettangolo originario

Poi moltiplico per q.c. che vale
0 fuori dal grande e $\neq$ nel
piccolo.

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 35

Note Title

05/11/2019

TEOREMI DI COMPATTEZZA

Obiettivo : data $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ con $\|u_n\|_{1,p,\Omega} \leq M$,
 sperare di trovare s.succ. che converge in qualche
 senso FORTE. (Debole sarebbe banale)
 (Applicazioni ovvie ai funzionali)

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Teorema (Caratt. comp. : vedi Analisi 2)

Sia (X, d) uno sp. metrico. Allora sono equiv.:

- (i) X è compatto per ricoprimenti
- (ii) X è compatto per succ.
- (iii) X è completo + tot. limitato

Def. (X, d) è tot. limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $S \subseteq X$
 con S **FINITO** tale che

$$X \subseteq \bigcup_{s \in S} B(s, \varepsilon)$$

Un tale S si dice ε -rete.

Prop. (Caratt. della relativa compattezza)

Sia (X, d) uno sp. metrico **completo**. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.
 Allora i seguenti fatti sono equiv.:

- (i) $\text{Clos}(Y)$ è compatto (nisp. metrica ristretta)
- (ii) ogni succ. a valori in Y ammette s.succ. convergente
 (magari non ad un elemento di Y)
- (iii) Y è totalmente limitato (nisp. metrica ristretta).

Prop. (Caratt. della totale limitatezza)

Sia (X, d) metrico, e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.

Allora sono equivalenti

- (i) Y è tot. limitato ↗ non nec. in Y
 (ii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $K \subseteq X$ tot. limitato t.c.

$$Y \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$$

(K è una ε -rete, ma non nec. finita)

(quando si va ad usare, di solito si usa K compatto)

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) è banale

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dato $\varepsilon > 0$ scelgo un K che va bene per $\frac{\varepsilon}{2}$

Scelgo S per K che va bene per $\frac{\varepsilon}{2}$

e concludo che S va bene per Y con ε .

— o — o —

Morale della favola: in un metrico completo, se voglio dim.

che un sottoinsieme Y è rel. compatto,

basta che trovi un K compatto t.c. ogni

el. di Y dista da K meno di ε .

(K dipende da ε)

— o — o —

TEOREMA (Ascoli - Arzelà in L^p)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, sia $p \in [1, +\infty)$ (vedere che succede per $p = +\infty$), sia $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$.

Supponiamo che

(i) Ω limitato

(ii) $\mathcal{F}$ è limitata in $L^p(\Omega)$, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathcal{F} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

(iii) $\mathcal{Y}$ è equicontinua nel senso $L^p(\Omega)$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u \in \mathcal{Y} \quad \forall R \in \mathbb{R}^d$$

$$|R| \leq \delta \Rightarrow \left\{ \int_{\Omega} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \varepsilon$$

$\uparrow$ estesa a 0 fuori di Ω
 $= \| \tau_R \hat{u} - \hat{u} \|_{L^p(\Omega)}$
 $\uparrow$ traslata R -esima

Allora $\mathcal{Y}$ è relativamente compatta in $L^p(\Omega)$.

Oss. L'enunciato vale per famiglie $\mathcal{Y} \subseteq L^p(\Omega)$, ma ha conseguenze in termini di succ.

Dim. Basta dimostrare che $\mathcal{Y}$ è tot. limitata in $L^p(\Omega)$.
 " " che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K_\varepsilon \subseteq L^p(\Omega)$
 compatto tale che

$$\mathcal{Y} \subseteq \bigcup_{u \in K_\varepsilon} B(u, \varepsilon)$$

$\uparrow$ palla in $L^p(\Omega)$

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo il $\delta > 0$ dato dall'ipotesi (iii), scelgo un mollificatore ρ e pongo

$$K_\varepsilon := \{ \hat{u} * \rho_\delta : u \in \mathcal{Y} \}$$

Step 1 Verifichiamo che è una ε -rete, cioè

$$\forall u \in \mathcal{Y} \exists v \in K_\varepsilon \quad \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Chi sarà mai v ? Ovviamente $v = \hat{u} * \rho_\delta$

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x+\delta y) \rho(y) dy$$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x) \rho(y) dy$$

quindi

$$|v(x) - u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)| \rho(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|}_{\frac{1}{p}} \underbrace{\rho(y)^{\frac{1}{p}}}_{\frac{1}{p'}} \rho(y)^{\frac{1}{p'}} dy$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|^p \rho(y) dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy \right\}^{1/p'}}_{=1}$$

Ora che ρ è "entrata dentro", integro in x

$$\int_{\Omega} |v(x) - u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|^p \rho(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy \int_{\Omega} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|^p dx$$

$\uparrow B(0,1)$ $\uparrow |\delta y| \leq \delta$

$$\leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy = \varepsilon^p$$

Con la radice ho la tesi.

Step 2 Dimostro che K_ε è equi-lim. in norma uniforme

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall v \in K_\varepsilon \quad \|v(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$$

$$|v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y)| \rho(y) dy$$

$\uparrow v = \hat{u} * \rho_\delta$ $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p'}$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y)|^p dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)^{p'} dy \right\}^{1/p'}}_{\text{numero}} \\
&= \left\{ \frac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(z)|^p dz \right\}^{1/p} \cdot \text{numero} \\
&= \text{numero} \cdot \underbrace{\|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}_{\|\mu\|_{L^p(\Omega)}} \leq M \quad \uparrow \text{ipotesi (ic)}
\end{aligned}$$

Step 3 Dimostro che k_ε è equi-Lipschitz, cioè

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall v \in k_\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad |\nabla v(x)| \leq L$$

Ora $v = \hat{u} * \rho_\varepsilon$ e faccio il conto

$$\begin{aligned}
\nabla v(x) &= \nabla \left[\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x+\delta y) \rho(y) dy \right] \\
&= \nabla \left[\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) \rho\left(\frac{x-z}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^d} dz \right] \\
&= \frac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) [\nabla \rho]\left(\frac{x-z}{\delta}\right) \left(-\frac{1}{\delta}\right) dz \\
&= -\frac{1}{\delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) [\nabla \rho]\left(\frac{x-z}{\delta}\right) dz
\end{aligned}$$

[Dopo video: tutti
gli $x-z$ sono
 $z-x$:)]

Metto i moduli e uso Hölder

$$|\nabla v(x)| \leq \frac{1}{\delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{u}(z)|}_{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{|[\nabla \rho]\left(\frac{x-z}{\delta}\right)|}_{\frac{1}{p'}} \cdot dz$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{\delta^{d+1}}}_{\text{numero}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(z)|^p dz \right\}^{1/p}}_{\text{limitato per (ii)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \left| [\nabla p] \left(\frac{x-z}{\delta} \right) \right|^{p'} dz \right\}^{1/p'}}_{\text{numero}}$$

Step 4 Grazie agli Step 2 e 3 l'insieme K_ε è rel. compatto rispetto alla conv. uniforme in $\text{Clos}(\Omega)$
 (sewe insieme compatto per usare AA classico)
 A maggior ragione K_ε è rel. cpt., quindi tot. lim., in $L^p(\Omega)$.
 — o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 36

Note Title

05/11/2019

Teorema (RELLICH – KONDRACHOV)

Sia $d \geq 1$ un intero e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto **LIMITATO** per cui valgono i teoremi di immersione (ma non servirà davvero)

Caso $p < d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ è compatta per ogni $q < p^*$ (minore **STRETTO**)

Caso $p = d$ L'immersione di sopra è compatta per ogni $q < +\infty$.

Caso $p > d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\text{dos}(\Omega))$ è compatta.

Def. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ con X e Y metrici si dice compatta se manda limitati di X in rel. cpt. di Y .
In termini di succ.: se $\{x_n\} \subseteq X$ è limitata, allora $f(x_n)$ ha s. succ. conv. in Y .

Dim. **Caso $p > d$** Tranquillo: un bound su $\|u\|_{1,p,\Omega}$ produce un bound su $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e sulle costanti di Hölder $\leadsto$ A.A. classico

Caso $p = d$ Tranquillo. Dato $q < +\infty$, esiste $p_1 < d$ tale che $q < (p_1)^*$

Ora $u \in W^{1,d} \Rightarrow u \in W^{1,p_1}$ e quindi il risultato segue dal caso $p_1 < d$.

Caso $p < d$ Considero la famiglia

$$\mathcal{F} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p,\Omega} \leq M\}$$

e devo dim. che u è rel. cpt. in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$

Iniziamo con il caso $q=1$ Devo verificare le ipotesi del criterio di rel. cpt.

Ω limitato e $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{cost.}$ Sono ovvi.

Step 1 Per ogni $k \geq 1$ poniamo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

e osserviamo che $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0$

(sono insieme a ∂ vuota contenuti in Ω di misura finita)

Step 2 Dimostriamo che

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'}$$

$$\text{LHS} \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R)| dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| dx$$

Stimo il secondo

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| \cdot \frac{1}{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{p'}} dx \leq \underbrace{\|\hat{u}\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_k)}}_{\leq \|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}} \|1\|_{L^{p'}(\Omega \setminus \Omega_k)}$$

Stessa cosa per l'altro addendo.

Step 3 Mostriamo che, per $|R| \leq \frac{1}{k}$, vale la stima

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq |R| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p'}$$

Ossemo che se $x \in \Omega_k$ e $|R| \leq \frac{1}{k}$, allora

$$\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x) = u(x+R) - u(x)$$

Supponiamo che u sia $C^\infty(\Omega)$. Allora

$$\begin{aligned} |u(x+R) - u(x)| &= |\psi(1) - \psi(0)| \leq \int_0^1 |\psi'(t)| dt \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \psi(t) := u(x+Rt) \\ &= \int_0^1 |\langle \nabla u(x+Rt), R \rangle| dt \leq |R| \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt \end{aligned}$$

Integro in dx :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |u(x+R) - u(x)| dx &\leq |R| \int_{\Omega_k} dx \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt \\ &= |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k} |\nabla u(\underbrace{x+Rt}_{"y"})| dx \\ &= |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k + tR} |\nabla u(y)| dy \\ &\quad \uparrow \text{traslato di } \Omega_k \subseteq \Omega \\ &\leq |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega} |\nabla u(y)| dy \\ &= |R| \int_{\Omega} |\nabla u(y)| \cdot 1 dy \\ &\quad \frac{1}{p} \quad \frac{1}{p'} \\ &\leq |R| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p'} \end{aligned}$$

Se u è meno regolare, la approssimo low-cost con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e tutto dovrebbe passare al limite (può che senza $|R| < \frac{1}{2k}$ perché i gradienti convergono solo negli aperti ben contenuti).

Step 4 Concludiamo opt. in $L^1(\Omega)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\|\tau_a \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega)} &= \|\tau_a \hat{u} - \tilde{u}\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} + \|\tau_a \hat{u} - \tilde{u}\|_{L^1(\Omega_k)} \\ &\leq 2\|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'} \\ &\quad + |\mathbb{R}| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p'}\end{aligned}$$

Rigorosamente (voglio verificare (ii) di A.A. $L^1(\Omega)$)

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo k abb. grande in modo che 1° termine $\leq \frac{\varepsilon}{2}$
- visto k , scelgo $\delta < \frac{1}{k}$ in modo che il 2° termine sia $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

Mettendo insieme ho finito.

Conquista di $q < p_*$

SLOGAN: limitato in L^{p_*} e piccolo / convergente in L^1
 implica piccolo / convergente in L^q per ogni $q < p_*$.

Disug. di interpolazione : per ogni $1 < q < p_*$ esiste $\alpha \in (0,1)$ tale che

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\alpha \cdot \|u\|_{L^{p_*}(\Omega)}^{1-\alpha}$$

Conclusione facile in 2 modi (qui uso le immersioni)

- ① Via A.A. $L^q(\Omega)$. Devo stimare $\|\tau_a \hat{u} - \hat{u}\|_{L^q(\Omega)}$.
 So che sono piccole in L^1 e limitate in L^{p_*}
 (metto somma e osservo che $\|u\|_{L^{p_*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^1, \Omega}$)

② Penso alla relativa cpl. in termini di succ.

Se prendo $\{u_n\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, allora

- u_n è limitata in $L^{p^*}(\Omega)$
- u_n ha s.succ. conv. in $L^1(\Omega)$, quindi in tutti gli L^q con $q < p^*$.

— o — o —

Oss. In tutta la prima parte della dim. non abbiamo usato che valga la immersione.

Esempio L'immersione NON è mai compatta quando $q = p^*$.

Dim. **Step 1** Esiste $\{x_n\} \subseteq \Omega$ ed esiste $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ tale che

$B(x_n, r_n) \subseteq \Omega$ e disgiunte

Step 2 Scelgo $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$ non banale e pongo



$$u_n(x) = \lambda_n \varphi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right) \in C_c^\infty(B(x_n, r_n))$$

↑
scelto in modo che $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$

Step 3 Dico che se $\{u_n\}$ sono equilimitate in $W^{1,p}(\Omega)$ Per questo mi basta limitare

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)}$$

Facendo il conto (occorre aver calcolato in prima) si vede che tendono addirittura a 0!!!

Step 4 Osservo che $\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ è costante !!!!

Fatto fondamentale: i λ_n vanno via !!!

Step 5 Osservo che $\{u_n\}$ non può avere s.succ. conv. in $L^{p^*}(\Omega)$ perché non ha s.succ. di Cauchy

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}}^{p^*} = \|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} = 2 \text{ Costante}$$

$\uparrow$
 supporti disgiunti
 se $n \neq m$.

Oss. Convergono a 0 in ogni $L^q(\Omega)$ con $q < p^*$.

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 37

Note Title

07/11/2019

TRACCE DI FUNZIONI DI SOBOLEV

Problema generale : data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definire $u|_{\partial\Omega}$
o più in generale $u|_K$ con $K \subseteq \Omega$
sottocsieme "d-1 dimensionale".

Più rigorosamente vorremmo

$$\text{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \text{qualcosa}(\partial\Omega)$$

con un po' di proprietà :

- linearità
- sulle funzioni continue è la restrizione
- stima del tipo

$$\| \text{Tr } u \|_{\text{qualcosa}} \leq C(p, d, \Omega) \| u \|_{1,p,\Omega}$$

- formula di int. per parti
- dipendenza continua da u

Oss. Per le funzioni $L^p(\Omega)$ tutto questo è impossibile

Casi facili

① $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, almeno per $p > 1$. Le funzioni Sobolev sono Hölder e quindi hanno valori puntuali fino al bordo

② $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto regolare, $p > d$.

Anche in questo caso $W^{1,p}$ si immerge nelle Hölder, quindi tutto ok con

$$\text{qualcosa} = C^0(\partial\Omega)$$

CASO MODELLO NON BANALE

$$d \geq 2, \quad p < d$$

$$\mathbb{R}_+^d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y > 0\}$$

Proposizione Per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valgono le seguenti stime

①

$$\|u(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}_+^d)}$$

Impura, ma
RHS su
 $\mathbb{R}_+^d$

- u è definita ovunque in $\mathbb{R}^d$
- il LHS ha la norma in $\mathbb{R}^{d-1}$
- il RHS ha la norma in $\mathbb{R}_+^d$

② Posto $\hat{p}_* := \frac{p(d-1)}{d-p}$ si ha $\hat{p}_* > p$ se $p > 1$

$$\|u(x, 0)\|_{L^{\hat{p}_*}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

pura con ∇ su tutto $\mathbb{R}^d$

③ per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ vale

$$\|u(x, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d, q) \|u\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}_+^d)}$$

Impura con full norm in $\mathbb{R}_+^d$

Dcm. **Step 1** Caso $p=1$ $\rightarrow$ finito, basta sostituirlo con $\mathbb{R}$ grande

$$u(x, 0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy$$

$$|u(x, 0)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} dy \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| = \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)}$$

Step 2 p generico. Applico step 1 a

$$v(x, y) := |u(x, y)|^2 u(x, y) = \varphi(u(x, y))$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \varphi'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (2+1) |u(x, y)|^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Dallo step 1 segue che

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)|^{2+1} dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x, 0)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right| dx dy$$

$$= (2+1) \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dx dy$$

$$\leq (2+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^{\frac{2p}{p-1}} dx dy \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dx dy \right\}^{1/p}$$

Scegliendo $2 = p-1$ diventa

$$\begin{aligned} \|u(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p &\leq p \|u(x, y)\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^{p-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \\ &\leq \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d}^{p-1} \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d} \end{aligned}$$

Elevando alla $1/p$ ho finito. La ① è dimostrata

Step 3 Scelgo n in modo tale che $\frac{2p}{p-1} = p_* = \frac{pd}{d-p}$

In questo la relazione di sopra diventa

$$\begin{aligned}
 \|u(x,0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq (n+1) \underbrace{\|u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}_+^d)}}_n \underbrace{\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}}_n \\
 &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^n \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{qui su tutto}
 \end{aligned}$$

Elevando tutto alla $\frac{1}{n+1}$ ho la stima in $L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})$.

Chi è $n+1$? $\frac{np}{p-1} = \frac{\cancel{p}d}{d-p} \Rightarrow n = \frac{d(p-1)}{d-p}$

$$\Rightarrow n+1 = \frac{d(p-1)}{d-p} + 1 = \frac{dp - \cancel{d} + d - p}{d-p} = \frac{p(d-1)}{d-p} = \hat{p}_*$$

Step 4 La stima per $q \in [p, \hat{p}_*]$ segue per interpolazione
 — o — o —

Teorema Siano $d \geq 2$ intero e $p \in [1, +\infty]$.

Allora per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ esiste

$$\text{Tr}: W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^{d-1})$$

con le proprietà seguenti

- ① È lineare
- ② $[\text{Tr} u](x) = u(x,0)$ per le $u \in C^0 \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$
- ③ Valgono le stime come nella proposizione non $\mathbb{R}_+^d$
- ④ Vale la formula di integrazione per parti $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ↓

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+^d} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) dx dy &= - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \varphi(x,y) dx dy \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{u(x,0)}_{\text{Tr } u(x)} \varphi(x,0) dx
 \end{aligned}$$

Dim

Definizione di Tr

Prendo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

La estendo per parità a $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Approssimo $\hat{u}$ con una successione $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Osservo che u_n è di Cauchy per la full norm anche in $\mathbb{R}^d$

Dalla proposizione deduco che $\{u_n(x,0)\}$ sono di Cauchy in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$, quindi hanno un limite.

Il limite NON dipende dalle approx scelte. Se $\{v_n\}$ sono altre approx, allora

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots$$

Sono ancora approx, quindi ancora di Cauchy e idem le loro restrizioni al bordo.

$$\text{Pongo } \text{Tr } u = \lim u_n(x,0)$$

↑ fatto in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$

Linearità Ovvio

Coincidenza nel caso continuo Se $u \in C^0$, allora $\hat{u} \in C^0$ e allora se scelgo le u_n fatte per convoluzione queste convergono puntualmente a $\hat{u}$ ovunque, quindi anche nei pti del tipo $(x,0)$.

Int. per parti Vale sulle approx e poi passo al limite.

Oss. In tutte le stime posso mettere al RHS solo norme su $\mathbb{R}_+^d$ (avendo esteso per ribaltamento $\|\hat{u}\|_{1,p,\mathbb{R}^d} = 2 \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$).

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 38

Titolo nota

07/11/2019

Continuità della traccia

Prop Sia $d \geq 2$ intero e $p > 1$. Allora la traccia è $\frac{1}{p}$ -Hölderiana dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Detto meglio, per ogni $0 \leq y_1 \leq y_2$ vale

$$\|u(x, y_2) - u(x, y_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} |y_2 - y_1|^{1/p'}$$

Dim Supponiamo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^{d-1}$ vale

$$\begin{aligned} |u(x, y_2) - u(x, y_1)| &\leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| \cdot 1 \, dy \\ &\leq \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \right\}^{1/p} |y_2 - y_1|^{1/p'} \end{aligned}$$

Eleviamo alla p e integriamo in dx :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, y_2) - u(x, y_1)|^p dx &\leq |y_2 - y_1|^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^p dx dy \end{aligned}$$

Elevando alla $1/p$ segue da qui per $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Per $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ qualunque estendo, approssimo del u e passo al limite.

— o — o —

Teorema (Continuità della traccia) [motivazione nel video]

Sia $d \geq 2$ intero, sia $p > 1$, sia $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ tale che
 $\uparrow$ escluso

$$(i) \quad u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

$$(ii) \quad \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$$

$$\text{Allora} \quad \text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty \quad \text{in } L^q(\mathbb{R}^{d-1})$$

per ogni $q \in [p, \hat{p}_*)$
 $\uparrow$ escluso

Dim. Trucco alla Money della zona di scambio, che ora è
 $y \in [0, \delta]$.

Fisso $\delta > 0$. Per ogni $y \in [0, \delta]$ vale

$$\begin{aligned} \|u_n(x, 0) - u_\infty(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq \|u_n(x, 0) - u_n(x, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \\ &\quad + \|u_n(x, y) - u_\infty(x, y)\|_{L^p(\dots)} \\ &\quad + \|u_\infty(x, y) - u_\infty(x, 0)\|_{L^p(\dots)} \end{aligned}$$

Eleviamo alla p e usiamo

$$(a+b+c)^p \leq c(p) (a^p + b^p + c^p) \quad \forall (a, b, c) \in [0, +\infty)^3$$

"3^{p-1}

Otteniamo

$$\|u_n(x, 0) - u_\infty(x, 0)\|_{L^p(\dots)}^p \leq c(p) \left\{ \|u_n(x, 0) - u_n(x, y)\|_{L^p(\dots)}^p \right. \quad (1)$$

$$+ \|u_n(x, y) - u_\infty(x, y)\|_{L^p(\dots)}^p \quad (2)$$

$$+ \|u_\infty(x, y) - u_\infty(x, 0)\|_{L^p(\dots)}^p \left. \right\} \quad (3)$$

Integro in dy per $y \in [0, \delta]$.

$$\text{LHS} = \delta \|u_m(x, 0) - u_\infty(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p$$

$$\textcircled{1} \leq \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p |y|^{\frac{p}{p'}} \leq M^p \delta^{\frac{p}{p'}}$$

e quindi

$$\int \textcircled{1} dy \leq M^p \delta^{1 + \frac{p}{p'}}$$

Analogamente

$$\int \textcircled{3} dy \leq \underbrace{\left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p}_{\downarrow \text{poi diremo che è finita}} \delta^{1 + \frac{p}{p'}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\delta dy \textcircled{2} &= \int_0^\delta dy \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx |u_m(x, y) - u_\infty(x, y)|^p \\ &\leq \|u_m - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$\delta \|Tr u_m - Tr u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq C(p) \left\{ M^p \delta^{1 + \frac{p}{p'}} + \left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \delta^{1 + \frac{p}{p'}} + \|u_m - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \right\}$$

Ora faccio a dx e sx il limsup per $m \rightarrow +\infty$

$$\delta \limsup \|Tr u_m - Tr u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq \delta^{1 + \frac{p}{p'}} C(p) \{ M^p + \text{cost}^p \}$$

Ora mando $\delta \rightarrow 0^+$ e ho finito nel caso $q = p$.

Così ho ottenuto che $\text{Tr } u_m \rightarrow \text{Tr } u_\infty$ in $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$.

La convergenza per ogni $q \in [p, \hat{p}_*)$ segue per interpolazione grazie

- alla convergenza in L^p
- alla limitazione uniforme in $L^{\hat{p}_*}$.

Resta da dim (anzi andava fatto come prima cosa) che $u_\infty \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$.

Questo segue dai soliti discorsi:

$\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$ quindi essendo $p > 1$ esiste s.succ. che conv. debolmente

$$\frac{\partial u_{m_k}}{\partial x_i} \rightharpoonup v_i \quad \text{per } i = 1, \dots, d$$

Per il solito doppio scambio nelle int. per parti $v_i = \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i}$

Per convessità segue anche che

$$\|\nabla u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$$

Oss. Per $p = 1$ le tracce sono definite ma funzionano male, in particolare il teo. di passaggio al limite non vale, nemmeno in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

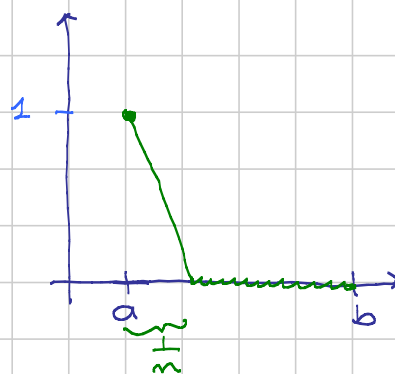
Consideriamo le u_m in figura

$u_m \rightarrow 0$ in tutti gli L^p con $p < +\infty$

sempre davvero $p=1$

$$\|u_i\|_{L^1((a,b))} = 1 \leq M$$

$$\text{Tr } u_m \not\rightarrow \text{Tr } u_\infty$$



CASO DI APERTO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Posso definire una $\text{Tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$

a patto di avere

↑ supporto decente
da poter integrare

- una stima del tipo

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(d, p, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

(u def. ovunque, LHS su $\partial\Omega$, RHS su Ω (ma non sarebbe grave se fosse su tutto $\mathbb{R}^d$))

- Ω che ammette approx. deluxe ed estender

Dimostrazione del tutto analoga: estendo, approx deluxe ed estere, succ. di Cauchy...

Come ottengo la stima chiave?

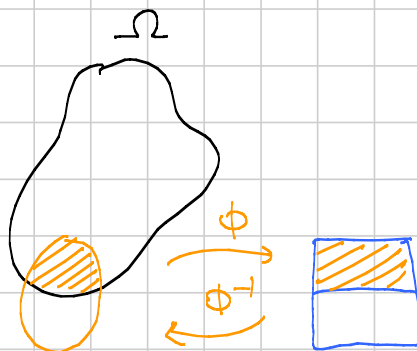
Cou la partizione dell'unità, a patto che $\partial\Omega$ sia supporti.

Scrivo $u = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

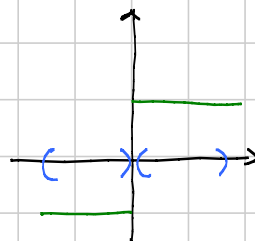
Le varie u_i le trasporto sul

cubetto standard, che poi è come fosse un semispazio, lì vale la stima, e poi torno indietro.

[Dettagli per esercizio]



Oss. I bordi bilateri sono unici delle tracce



Problema La traccia è surgettiva? NO

Chi è l'immagine della traccia?

Risposta per il futuro:

$$W^{1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega) \quad !!!$$

non interno

[Vedi fine corso per caso $p=2$].

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 39

Note Title

11/11/2019

Spazi $W_0^{m,p}(\Omega)$ Già visto: $W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$

e si poteva definire come

- l'insieme delle $u \in L^p(\Omega)$ per cui esiste $\{u_n\} \subseteq C_1^{\infty,p}(\Omega)$ oppure $\{u_n\} \subseteq C^{m,p}(\Omega)$ tali che
 $\rightarrow u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
 $\rightarrow D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ in $L^p(\Omega)$ (a posteriori $v_\alpha = D^\alpha u$) $\forall |\alpha| \leq m$.
non c'è il spt. compatto
- completamento astratto di $C^{\infty,p}(\Omega)$ o $C^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla distanza indotta da $\|u\|_{m,p,\Omega}$.

Def. Sia $d \geq 1$ intero, $m \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$.Si indica con $W_0^{m,p}(\Omega)$ lo spazio definito in uno dei seguenti 3 modi equivalenti.

- Completamento astratto di $C_c^\infty(\Omega)$ o $C_c^m(\Omega)$ rispetto alla solita full norm.
- L'insieme delle $u \in L^p(\Omega)$ che si approssimano al solito modo con $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ oppure $u_n \in C_c^m(\Omega)$.
- Chiusura in $W^{m,p}(\Omega)$ di $C_c^\infty(\Omega)$ oppure $C_c^m(\Omega)$ (ovviamente chiusura risp. alla solita norma).

Oss. Brutalmente $W_0^{1,p}(\Omega)$ vorrebbe essere lo spazio delle funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ che sono nulle al bordo. In realtà non è proprio così, tranne nel caso in cui $\partial\Omega$ è abbastanza regolare.

— o — o —

Achtung! Non bisogna confondere spazi del tipo

$$W_0^{2,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

Pensiamo al caso $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Allora

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \underbrace{u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0}_{\text{valori puntuali di } u \text{ e } u' \text{ hanno senso fino al bordo}}\}$$

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u(a) = u(b) = 0\}$$

Nel primo caso abbiamo approx. $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ che convergono risp. a $\|u\|_{2,p,(a,b)}$. Questo per A.A. implica la conv. unif. in $[a,b]$ di u_n e u'_n , e queste si annullano al bordo.

Nel secondo caso la conv. è solo in $\|u\|_{1,p,(a,b)}$ il che implica l'unif. solo sulle funzioni.

Teoremi di immersione Anche se Ω è terribile, questi valgono nella versione più pura possibile, come possiamo in $\mathbb{R}^d$. In particolare per $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si hanno queste stime.

- Per $p < d$ vale

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{Pena!}$$

- Per $p = d$ vale

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(p,d,q) \|u\|_{1,p,\Omega} \quad \forall q \in [p, +\infty)$$

- Per $p > d$ vale

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(p,d) \|u\|_{1,p,\Omega} \quad \text{e stimo}$$

la costante di $(1 - \frac{d}{p})$ -Hölder in modo puro ($\leq c(p,d) \|\nabla u\|_p$).

Valgono inoltre tutte le stime che si ottengono per interpolazione, ad esempio, per $p < d$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, d, q) \|u\|_{L^p, \Omega} \quad \begin{array}{l} \forall q \in [p, p^*] \\ \forall q \leq p^* \text{ se} \\ \text{meas}(\Omega) < +\infty \end{array}$$

Discorso analogo se $u \in W_0^{m, p}(\Omega)$

Dim. Valgono in $C_c^\infty(\Omega)$ e passando al limite valgono in $W_0^{m, p}(\Omega)$.

Oss. Allo stesso modo i teoremi di immersione compatta valgono in $W_0^{m, p}(\Omega)$, anche se Ω è terribile, purché limitato.

— o — o —

Prop. (Implicazione facile) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque, $u \in W_0^{1, p}(\Omega)$. Allora u estesa a 0 fuori di Ω , che indichiamo con $\hat{u}$, sta in $W^{1, p}(\mathbb{R}^d)$.

Dim. Prendiamo le approx. $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ come nella def. Le loro estese $\hat{u}_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ora

$$\hat{u}_m \rightarrow \hat{u} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

$$\nabla \hat{u}_m = \widehat{\nabla u_m} \rightarrow \widehat{\nabla u} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

A posteriori questo dice pure che $\widehat{\nabla u} = \nabla \hat{u}$.

— o — o —

Prop. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $p > d$, allora davvero

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Dim. La conv. delle approx. è unif. su $\text{Clos}(\Omega)$.
— o — o —

Teorema (Caratterizzazione di $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto con $\partial\Omega$ regolare (C^1 + compatto). Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(ii) $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$
↑ estesa a 0 fuori

(iii) $\text{Tr} u = 0$
↑ traccia su $\partial\Omega$, ben definita essendo tutto regolare

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) vale sempre.

A noi serve (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (iii) Segue dalla costruzione della traccia come limite delle tracce di approx. regolari, che ora posso prendere nulle al bordo.

In alternativa, si può fare seguire dalla continuità della traccia: se $u_n \rightarrow u$ e controllo i gradienti, allora $\text{Tr} u_n \rightarrow \text{Tr} u$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Con i soliti discorsi ci si riduce al caso $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ (controllare con partizione dell'unità)

Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ con traccia nulla. Voglio dim. che $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, con

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} D_{x_i} \varphi \, dx \, dy = - \int_{\mathbb{R}^d} D_{x_i} \hat{u} \varphi \, dx \, dy$$

$\uparrow$ prime $\leftarrow$ derivata
 $d-1$ variabili

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sarebbe ovvio se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$.

Nel caso generale la formula di sopra vale con al RHS anche un termine di bordo del tipo

$$- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x, 0) \varphi(x, 0) \, dx$$

$\uparrow$ Tr u , che per ipotesi si annulla

(ii) $\Rightarrow$ (i) Come sempre ci riduciamo a $\mathbb{R}_+^d$

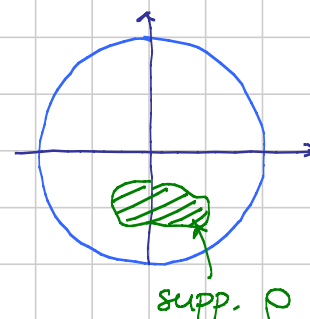
Data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ la cui estesa $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, voglio approx u mediante $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$.

Ingenualmente potremmo fare delle convoluzioni, ma a priori questo non sembra garantire il supporto contenuto in $\mathbb{R}_+^d$.

Questo è dovuto ad un nucleo radiale centrato nell'origine.

Se invece usiamo un nucleo con supporto ben contenuto nella parte bassa di $B(0,1)$, allora $\ddot{\smile}$.

Questo garantisce una fascia di sicurezza intorno a $\partial \mathbb{R}_+^d$ in cui la convoluzione si annulla !!



— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 40

Note Title

11/11/2019

Esempio $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$

Segue dall'approssimazione deluxe (prima approx. u creando il supporto compatto, poi approssimo questa con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Ci sono altri casi in cui vale?

Esempio $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $d=1$

No! In questo caso, almeno per $p > 1$, si ha

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \underline{u(0)=0}\}$$

i valori puntuali sono ben definiti e passano al limite per conv. unif., che segue da quella in $\|\cdot\|_{1,p}$ se $p > 1$.

Prop. $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ se $d \geq 2$ e $p \leq d$
(se $p > d$ c'è il discorso dei valori puntuali)

(In generale vale l'uguaglianza per $\mathbb{R}^d \setminus$ poca roba)

Dim. Data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ la voglio approssimare con $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

Lo facciamo poco per volta.

Supponiamo ci venga dato $\varepsilon > 0$

Step 1 Esiste $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\|u - v\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$



Pongo $u_m(x) := u(x) \varphi\left(\frac{x}{m}\right)$ con φ come in figura

e per u abbastanza grande abbiamo

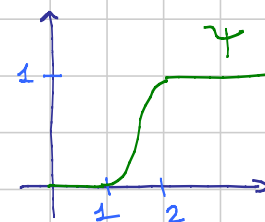
$$\|u - u_m\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{8} \varepsilon$$

Poi a sua volta approssimo per convoluzione

Step 2 Data $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ esiste $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ tale che

$$\|v - w\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

Basta pone



$$v_m(x) := v(x) \psi(m|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

e dico che per m grande va bene.

$$v_m(x) \rightarrow v(x) \quad \text{puntuale dominato, quindi}$$

$$\|v_m - v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$$

$$D_{x_i} v_m(x) = \underbrace{D_{x_i} v(x) \psi(m|x|)}_{\downarrow} + v(x) m \psi'(m|x|) \underbrace{\frac{x_i}{|x|}}_{\leq 1}$$

$D_{x_i} v$ puntuale dominato
 $\leadsto$ ok come prima

SCI: praticamente ovvia (integrandi convessa)

$\Rightarrow$ esiste il minimo in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

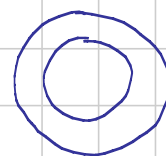
Questo non è 0 perché se lo fosse avremmo $\nabla u = 0$ q.o., e questo implica che u è loc. costante $\Rightarrow$ costante e la costante dovrebbe essere $= 0$ al bordo e ≥ 1 in x_0 .

Subesercizio Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u = 0$ (q.o.), possiamo dire che u è loc. cost. (q.o.)

[SI!] Basta dire che u è costante in ogni palla
Considero $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla u * \rho_\varepsilon \quad \text{nella palla + piccola}$$

$= 0 \quad \quad \quad "$ $"$ $"$

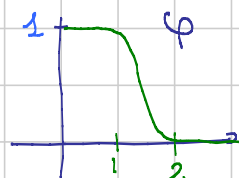


Quindi se u_ε sono costanti nella palla + piccola, e allora convergono ad una costante.

— o — o —

Esercizio $\text{Cap}_p(\text{punto}, \text{palla}) = 0$ se $p < d$

Wlog punto = centro



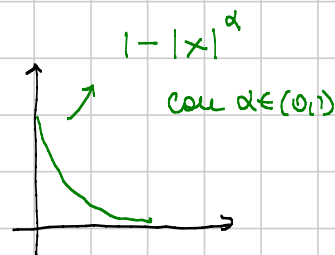
Come sempre pongo $u_n(x) := \varphi(n|x|)$

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_n(x)|^p dx \leq \int_{B(0,1)} n^p \underbrace{|\varphi'(n|x|)|^p}_{\leq \text{cost}} dx \sim \frac{n^p}{n^d} \quad \text{☺}$$

$\uparrow$
 $B(0, \frac{2}{n})$

Esercizio Stessa cosa con $p = d$

Pongo $u_\alpha(x) := 1 - |x|^\alpha$



$$\begin{aligned}
 \int_{B(0,1)} |\nabla u_\alpha(x)|^p dx &= \alpha^p \cdot \text{costante} \cdot \int_0^1 (r^{\alpha-1})^p \cdot r^{\alpha-1} dr \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{tutta la trigo} \\
 &\quad \text{è qui} \\
 &= \alpha^p \cdot \text{costante} \cdot \int_0^1 r^{p(\alpha-1) + \alpha-1} dr \\
 &= \alpha^p \cdot \text{costante} \cdot \frac{1}{\alpha p} \cdot 1 \\
 &= \alpha^{p-1} \cdot \text{costante} \cdot \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

Se $d > 1$ e $\alpha \rightarrow 0$ si vede che l'inf. è 0.

Se vogliamo una succ. infizzante C^∞ , basta approssimare, ad esempio per convoluzione. Occhio al valore puntuale $u(0) \geq 1$ (sistemazione nel video).

— 0 — 0 —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 41

Titolo nota

12/11/2019

Disuguaglianze alla Poincaré

Setting: $d \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$.

Supponiamo Ω sia limitato (ipotesi diseducativa).

Allora vale la disuguaglianza

POINCARÉ

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Disuguaglianza SECONDO NATURA:
siamo la funzione con la sua
derivata

altrimenti è
banalmente falsa
(funzioni costanti)

Più in generale vale

POINCARÉ - SOBOLEV

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$q \leq p^*$$

Oss. Il caso interessante è quello in cui $p < d$.

- Il caso $p > d$ è facile perché siamo norma infinito con il gradiente e poi se Ω è limitato
- Il caso $p = d$ si deduce facilmente dal caso $p < d$, un po' come nei teoremi di compattezza.

(ogni $q < +\infty$ è in questo caso $q < (p_1)^*$ con $p_1 < d$)

Quindi basta trattare il caso $p < d$.

Dim (Diseducativa)

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c_1(q, p, d, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

↑
interpolazione

$$\leq c_1(q, p, d, \Omega) c_2(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

↑
immersione pura
che vale grazie a $u \in W_0^{1,p}$

↑↑

— o — o —

Oss. La dipendenza dall'insieme si paga solo nella disug. di interpolazione

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \\ &\leq \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^{p^*} dx \right\}^{\frac{q}{p^*}} \left\{ \text{meas}(\Omega) \right\}^{1 - \frac{q}{p^*}} \end{aligned}$$

↑ ↑ ↑
 $\frac{q}{p^*}$ $1 - \frac{q}{p^*} = \frac{p^* - q}{p^*}$

Faccendo radice q -esima ho dipendenza esplicita da Ω .

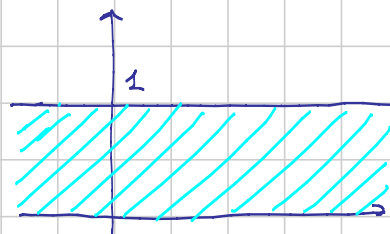
— o — o —

L'ESEMPIO Può valere una disug. alla Poincaré anche se Ω ha misura infinita.

In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $\Omega := \mathbb{R} \times (0, 1)$.

Supponiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ abbia traccia nulla per $y=0$.

Allora vale



$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \underbrace{\text{cost.}}_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

↑
basta $\frac{\partial u}{\partial y}$

Basta fare il conto per le u di classe C^∞ e poi si procede per approssimazione

$$|u(x, y)| = \left| \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt \right| \leq \int_0^y \underbrace{\left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right|}_{\frac{1}{p}} \underbrace{1}_{\frac{1}{p'}} dt$$

↑
uso che $u(x, 0) = 0$

$$\leq \left\{ \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_0^y 1 dy \right\}^{1/p'}}_{\leq 1}$$

Elevo alla p e integro in dx su tutto $\mathbb{R}$ e ho la tesi.

Morale: vale una disug. di tipo Poincaré quando ogni punto di Ω ha "abbastanza vicino" un pto in cui u si annulla.

Domanda: nell'esempio precedente, posso usare esponenti diversi?

[Hint: provare con $u(\lambda x, y)$]

Valgono disug. simili se u non si annulla?

$$\|u - u_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

POINCARÉ - SOBOLEV - WIRTINGER

dove

$$u_\Omega := \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u(x) dx$$

è la media di u in Ω .

Teorema Se $p < d$ (gli altri casi sono più facili)

la disug. PSW vale se

- (i) Ω limitato
- (ii) in Ω valgono i teoremi di immersione e/o compattezza
- (iii) Ω connesso
- (iv) $q \leq p_*$

Strategie dimostrative:

- via immersioni
- per assemplo
- via pbm. di minimo
- via pbm. di massimo

Osservazioni preliminari

- ① Posso supporre $u_\Omega = 0$. Altrimenti considero $v = u - u_\Omega$.
- ② Posso supporre $\|u\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$
- ③ Posso supporre $\|u\|_{L^q(\Omega)} = 1$. Basta osservare che la disug. è omogenea.
- ④ Il problema è equiv. a dim. che

$$\inf_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u\|^p dx : u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^q(\Omega)} = 1, u_\Omega = 0 \right\} > 0$$

Infatti, se lo dimostro, la disug. vale con

$$c(p, q, \Omega) = \frac{1}{\inf}$$

Se dimostro che $\inf = \min$, allora ho finito, perché il min. corrisponderà ad una certa $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ e questa non può avere $\nabla u_0 \equiv 0$ perché, essendo Ω connesso, sarebbe costante, e farebbe fatica ad avere $\|u_0\|_q \geq 1$ e $(u_0)_\Omega = 0$.

Supp. di voler dim. che min. esiste con metodo diretto

• Compattezza: da $\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ e $\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq 1$ ho un controllo su funzioni e derivate.

Se fosse $p = q$, avrei un controllo di $\|u_m\|_{1,p,\Omega} \leq M'$ e quindi avrei s.succ.

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

A quel punto è fatta per SCI e il fatto che i vincoli passano al limite per convergenza forte.

Se fosse $p \leq q < p_*$ me la caverei ugualmente. Avrei
 $\uparrow$ stretta

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq c \Rightarrow \|u_m\|_{1,p,\Omega} \leq M'$$

e per i teo. di compattezza troviamo

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{in } L^q(\Omega)$$

Se fosse solo $q < p_*$ avremmo

$$\|u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{cost} \|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq \text{cost}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{cost} \|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{cost}$$

$$\rightarrow \|u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq M$$

$$\Rightarrow \exists u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ in } L^1(\Omega)$$

↑
compattata con $p=1$

Ora è immediato che $(u_\infty)_\Omega = 0$, ma cosa possiamo dire di

$$\|u_\infty\|_{L^q(\Omega)} \quad ?$$

Questo purtroppo non è vero.

— 0 — 0 —

Commenti aggiunti dopo video:

- ① nel caso $q < p_*$ si poteva anche ottenere $\|u_n\|_{L^q(\Omega)} \leq M$ e da questa dedurre dalle immersioni compatte che

$$\exists u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ in } L^q(\Omega)$$

- ② in tutti i casi bisogna verificare che $u_\infty \in W^{1,p}(\Omega)$ e che

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u_\infty$$

almeno debolmente. Questo richiede la compattanza debole delle palle in $L^p(\Omega)$ ed un ulteriore passaggio di sottosuccessioni.

Ancora più importante: questo non funziona per $p=1$.

Ulteriori commenti alla lezione successiva.

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 42

Note Title

12/11/2019

Dim PSW (Senza passare per il metodo diretto fra cui che
Come sempre supponiamo $u_\Omega = 0$. Allora per $p=q$)

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

interpolazione

$$\leq C(p, q, \Omega) \{ \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \}$$

immersioni se Ω è decente ↑ si stima cd. solo gradiente come fatto prima

$$\leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Dim PSW (Per assurdo con argomento di compattezza)

Supponiamo per assurdo che il famoso $\inf$ sia $= 1$.

Allora esiste $\{u_m\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$(u_m)_\Omega = 0 \quad \|u_m\|_{L^q(\Omega)} = 1 \quad \|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{m}$$

↑
o comunque tendono a 0

Supponiamo $p \leq q < p^*$ (per $q = p^*$ ci sono problemi)
Allora dalle ipotesi segue

$$\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq M$$

e quindi esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in $L^q(\Omega)$ (qui serve $q < p^*$ per il teo. di compattezza). Passando al limite abbiamo

$$(u_\infty)_\Omega = 0 \quad \|u_\infty\|_{L^q(\Omega)} = 1 \quad \nabla u_\infty \equiv 0$$

(Sappiamo che $\nabla u_n \rightarrow 0$ forte in $L^p(\Omega)$, ma possiamo dire che $\nabla u_\infty = \lim \nabla u_n$? Sì, basterebbe anche la sola convergenza debole di funzioni e gradienti)
Ma una tale u_∞ non può esistere in Ω connesso.

— o — o —

Oss. La dimostrazione con il metodo diretto, nel caso $p=q$, non funziona nel caso $p=1$, mentre funziona la dim. per assurdo.

Dove non funziona? Avevamo ottenuto $\|u_n\|_{1,p,\Omega} \leq M'$ da cui

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

Cosa posso dire di ∇u_{n_k} ?

Mi servirebbe che, a meno di ulteriori s.succ., $\nabla u_{n_k} \rightarrow$ q.c. anche solo debolmente.

Argomento standard: $\|\nabla u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \leq M'$, quindi a meno di s.succ.

$$\nabla u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} v \quad (v \text{ ha } n \text{ componenti, e da comp. è comp. } \times \text{ comp.})$$

La compattezza debole delle palle vale solo per $p > 1$.

— o — o —

Approccio variazionale alle eq. alle derivate parziali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ una palla. Vogliamo risolvere

$$\Delta u = \text{stu } u$$

$$u|_{\partial\Omega} = \text{funzione data} \\ (\text{DBC})$$

$$\Delta u = u^{2019} \\ \text{DBC}$$

Formulazione variazionale: cerco funzionali la cui ELE sia l'eq. data

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \cos u \right) dx \qquad F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^{2020}}{2020} \right) dx$$

$$\text{ELE: } \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s(x, u, \nabla u)$$

Uno risolve il problema di minimo

$$\min \{ F(u) : u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \text{DBC} \}$$

Dove assume valori $F(u)$? $\rightarrow$ Nel primo caso reali

(in ogni caso $+\infty$ è accettabile)

$\rightarrow$ Nel secondo dipende dalla dimensione, occorre vedere se H^1 si immerge in $L^{2020}(\Omega)$

$$\Leftrightarrow 2020 < 2^* = \frac{2d}{d-2}$$

(disuguaglianza)

Oss. Che senso hanno le DBC? Si interpretano in termini di traccia, quindi devo essere sicuro che $\text{DBC} \in \text{Tr}$

Uscita classica: uno prende $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ e impone una condizione del tipo

$$\text{Tr } u = \text{Tr } u_0$$

il che è equiv. a

$$u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Compattezza $F(u_n) \leq M$

- Ω limitato è gratis
- $\|\nabla u_n\|_{L^2} \leq M'$ è quasi gratis.
Basta avere stime del tipo

$$L(x, s, p) \geq A |p|^2 - B \quad \text{con } A > 0$$

- Sufficiente stime su $\|u_n\|$

[Aggiunto dopo video: nel secondo caso segue banalmente da $\|u_n\|_{L^2} \leq \text{cost.} \cdot \|u_n\|_{L^{2^*}}$]

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{limitata}} + \underbrace{\|u_n - u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{sta in } W_0^{1,2}(\Omega)}$$

$$\text{(Poincaré)} \leq \text{cost} \|\nabla(u_n - u_0)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \text{cost} (\|\nabla u_n\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2})$$

$$\leq M''$$

Alla fine esiste u_{n_k} tale che

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (\text{in realtà fino a } 2^* \text{ escluso})$$

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u_\infty \quad \text{debole } L^2(\Omega)$$

(ci sono due step: prima to. di cpt. e faccio convergere le u_n poi estraggo di nuovo per far convergere debole i gradienti)

Semicontinuità

- Sulla parte di gradiente è sci della norma risp. conv. debole

- Sulla parte di funzione

→ nel primo caso segue dalla conv. puntuale q.o. e dominata, dunque abbiamo

$$\int_{\Omega} \cos(u_n) dx \rightarrow \int_{\Omega} \cos(u_{\infty}) dx$$

(questo darebbe convergenza solo sulla s.succ. su cui si ha puntuale q.o., ma poi si conclude con il lemma della sotto-sotto)

→ nel secondo caso serve Fatou e si ottiene

$$\liminf \int u_n^{2020} \geq \int u_{\infty}^{2020}$$

(Basterebbe la debole e convergenza di x^{2020}).

In alternativa:

- prendo la s.succ. in cui $\liminf = \lim$
- estraggo a sua volta per avere puntuale q.o.
- uso Fatou)

— o — o —

Oss. In fase di compattezza occorre dire che

$$\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_{\infty}$$

— o — o —

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 43

Note Title

14/11/2019

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \cos u \right) dx \quad F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^{2020}}{2020} \right) dx$$

$\nwarrow$ Palla $\nwarrow$ Palla

Metodo diretto: esiste il minimo di $F(u)$ in $H^1(\Omega)$ con DBC.

Detto u_0 un p.to di min., cosa risolve u_0 ?

ELE DEBOLE $\varphi(t) := F(u_0 + tv)$ con $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2} t^2 |\nabla v|^2 + t \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle - \cos(u_0 + tv) \right) dx$$

e simile nel 2° caso

$$\varphi'(t) = t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} \sin(u_0 + tv) v \, dx$$

Nel 1° caso è gratis una dominazione sulla presunta derivata

$$\varphi'(t) = \text{stessi primi due termini} + \int_{\Omega} (u_0 + tv)^{2019} v \, dx$$

Per poter derivare serve dominazione sull'ultimo

$$|u_0 + tv|^{2019} |v| \leq \text{cost} \left\{ |u_0|^{2019} + |t|^{2019} |v|^{2019} \right\}$$

$\uparrow$ No p.b.m. $\uparrow$ $\uparrow$ No PBM

poiché $F(u_0) < +\infty$, allora
 $u_0 \in L^{2020} \Rightarrow u_0 \in L^{2019}$

Imponendo $\varphi'(0) = 0$ troviamo

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \, dx &= \int_{\Omega} \sin(u_0) v \, dx \\ - \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \, dx &= \int_{\Omega} u_0^{2019} v \, dx \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{\Omega}} \right\} \begin{array}{l} \text{1ª forma} \\ \text{integrale} \\ \text{di ELE} \end{array}$$

REGOLARITÀ ELLITTICA

1 Eq. Ellittiche lineari

1.1 Eq. Ell. lineare basic

- Equazione

$$\Delta u = f$$

- Funzionale $L(x, s, p) := \frac{1}{2} |p|^2 + s f(x)$

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u f(x)$$

- Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

1.2 Eq. Ell. lineare con coeff.

- Equazione $\operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f$

dove $A: \Omega \rightarrow$ Matrici $d \times d$ simmetriche

- Funzionale $L(x, s, p) := \frac{1}{2} \langle A(x) p, p \rangle + s f(x)$

forma quadratica in p con
coeff. dip. da x

$$F(u) = \int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u, \nabla u \rangle + \int_{\Omega} f(x) u dx$$

- Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Def. L'equazione si dice (UNIFORMEMENTE) ELLITTICA se

$$\exists \nu > 0 \quad \text{t.c.} \quad A(x) \geq \nu \text{Id} \quad \forall x \in \Omega$$

cioè $\langle A(x)p, p \rangle \geq \nu |p|^2$

Oss. Sotto ipotesi di ellitticità

$$\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx \leq M \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{M}{\nu}$$

Tocchiamo con mano:

$$\text{div}(A(x) \nabla u) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

$$\langle A(x) \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

1.3 Eq. ell. Lineare supergenerale

$L(x, s, p) = \text{pol. di 2° grado nelle variabili } s \text{ e } p \text{ con coeff. che dipendono da } x$

2 Equazioni Ellittiche SEMILINEARI

• Equazione

$$\begin{aligned} \text{div}(A(x) \nabla u) &= g(x, u) \\ \Delta u &= g(x, u) \end{aligned}$$

Moralmente: Lineare nella parte di derivata, non lineare nella parte di funzione

primitiva in s
↑
di $g(x, s)$

• Funzionale

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} \langle A(x)p, p \rangle + G(x, s)$$

- Formulazione debole

$$-\int \langle A(x) \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int g(x, u) \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

3] Eq. Ellittiche QUASI LINEARI

- Equazione $\operatorname{div} (A(x, u, \nabla u)) = g(x, u)$

↑↑ ↑↑

- Funzionale $L(x, s, p) = \varphi(p) + G(x, s)$

↑ funzione convessa di p
— o — o —

Regolarità ellittica per equazioni LINEARI

$$\Delta u = f$$

$$\operatorname{div} (A(x) \nabla u) = f$$

Due tipi di risultati (per soluzioni deboli)

- Regolarità interna

$$f \in \text{Spazio}_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow \boxed{D^2 u} \in \text{Spazio}_{\text{loc}}(\Omega)$$

Matrice Hessiana di u

- Regolarità fino al bordo

$$f \in \text{Spazio}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in \text{Spazio}(\Omega)$$

↑ stesso spazio

Oss. Sto assumendo che Δu è qualche parte e si ottiene che tutte le deriv. seconde SEPARATAMENTE stanno nello stesso spazio, comprese le miste

Ultra-brutal: se controllo $x^2 + y^2 + z^2$, controllo x^2, y^2, z^2
e anche xy, yz, zx

Risultati tipici

$$f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega), \text{ cioè } u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$$

TEORIA
 L^2

$$f \in L^2(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in L^2(\Omega), \text{ cioè } u \in H^2(\Omega)$$

$$f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \quad (u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega))$$

stessa senta loc

TEORIA
 L^p $(1 < p < +\infty)$

$$f \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$$

$$\text{cioè } u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$$

stessi senta loc

TEORIA DI
SCHAUDER $\alpha \in (0, 1)$
↑
esclusoAchtung! Altre implicazioni sono false !!

$$f \in L^1(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in L^1(\Omega)$$

$$f \in L^\infty(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in L^\infty(\Omega)$$

$$f \in C^0(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in C^0(\Omega)$$

$$f \in \text{Lip}(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in \text{Lip}(\Omega)$$

— o — o —

Nemmeno con
i loc a
dx e/o sxBack to esempi iniziali (da ora $Du = \nabla u$)

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\Omega} \underbrace{\sin u}_{f \in L^2(\Omega)} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\text{Teoria } L^2 \Rightarrow D^2 u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$$

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\Omega} \boxed{u^{2019}} \varphi dx$$

↑
 $f \rightsquigarrow$ scritto così sta in $L^{\frac{2020}{2019}}(\Omega)$
 quindi non in L^2 😞

Se DBC sono limitate, un argomento di truncamento ci dice che $f \in L^\infty(\Omega)$ e quindi $L^2(\Omega)$.

I risultati di regolarità valgono in versione iterata

$$f \in H^k(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in H^k(\Omega) \text{ cioè } u \in H^{k+2}(\Omega)$$

Qui tira aria di BOOTSTRAP

$$\sin u \in L^2 \Rightarrow u \in H^2 \xRightarrow{\text{MAGARI}} \sin u \in H^2 \Rightarrow u \in H^4 \Rightarrow \dots$$

ma quando sto in H^{tanto} inizio ad avere derivate vere, e quindi arrivo a C^∞ .

MAGARI !!!

$$D(\sin u) = \cos u \cdot Du$$

$$D^2(\sin u) = -\sin u \underbrace{|Du|^2}_{\substack{\in L^2 \text{ se} \\ u \in W^{1,4}}} + \underbrace{\cos u \cdot D^2 u}_{\in L^2 \text{ se } u \in H^2}$$

[Aggiunto dopo video: così è scritto male perché sembra un numero, ma invece è una matrice]
(vedi sotto)

Buona notizia: in dim. $d \leq 4$ valgono le implicazioni

$$u \in H^2 \xRightarrow{\substack{\uparrow \uparrow \\ \text{immersioni}}} u \in W^{1,4} \Rightarrow \sin u \in H^2$$

[Aggiunto dopo video:

$$\frac{\partial^2 (\sin u)}{\partial x_i \partial x_j} = -\sin u \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + \cos u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

La sostanza non cambia: serve $u \in H^2 \cap W^{1,4}$ affinché stia in L^2]

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 44

Note Title

14/11/2019

Teorema (Regolarità $L^2(\Omega)$ interna)

Consideriamo l'eq.

$$\operatorname{div}(A(x)Du) = f \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

Supponiamo che

(i) $A(x)$ unif. ellittica con costante ν (ii) $A \in C^1(\Omega)$ (iii) $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ (iv) $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sia soluzione debole, cioè

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Allora $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e per ogni $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ vale la stima

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C(\nu, \Omega_1, \Omega_2) \{ \|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega_2} \}$$

Teorema (Regolarità L^2 fino al bordo)Stessa cosa senza i loc, ma assumendo anche regolarità di $\partial\Omega$ (ad esempio compatto + classe C^2)Oss. I teoremi valgono abbastanza facilmente in versione iterata, cioè

$$f \in H^k_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$$

con stima come uno si aspetta.

Dimostrazioni ABUSIVE del teorema di reg. interna

Parola chiave: STIME A PRIORI: assumiamo che la soluzione esista e sia C^∞ e dimostriamo delle stime "contro natura", cioè stime delle derivate con le funzioni.

Caso 1 $d=2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A = \text{Id}$ $u_{xx} + u_{yy} = f$

Assumiamo anche $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$
La form. debole diventa

$$-\int_{\mathbb{R}^2} u_x \varphi_x + u_y \varphi_y = \int_{\mathbb{R}^2} f \varphi$$

Uso $\varphi = u_{xx}$ (posso perché è tutto C^∞)

$$-\int_{\mathbb{R}^2} u_x \underbrace{u_{xxx}} + u_y \underbrace{u_{yxx}} = \int_{\mathbb{R}^2} f u_{xx}$$

Ora

$$\text{RHS} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Al LHS integro per parti

$$\text{LHS} = \int_{\mathbb{R}^2} u_{xx}^2 + u_{xy}^2$$

Mettendo insieme: (tutte le norme sono in $L^2(\mathbb{R}^2)$)

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 &= \text{LHS} = \text{RHS} \leq \|f\| \cdot \|u_{xx}\| \\ &\leq \|f\| \left\{ \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Se semplifico ottengo che

$$\left\{ \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 \right\}^{1/2} \leq \|f\|$$

Se partivo con $\varphi = u_{yy}$ controllavo pure $\|u_{yy}\|^2$.
 — o — o —

Caso 2 $A = \text{Id}$, d generico, u e $f \in C_c^\infty$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi f$$

Uso $\varphi = u_{x_i x_i}$

$$\text{RHS} = \int_{\mathbb{R}^d} u_{x_i x_i} f \leq \|u_{x_i x_i}\| \cdot \|f\|$$

$$\text{LHS} = -\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, \underbrace{Du_{x_i x_i}}_{\substack{\uparrow \\ \text{scrivere tutto con gli indici} \\ \text{per vedere cosa sta succedendo}}} \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} \langle Du_{x_i}, Du_{x_i} \rangle dx$$

Mettendo insieme:

$$\|Du_{x_i}\|^2 = \text{LHS} = \text{RHS} \leq \|f\| \cdot \|u_{x_i x_i}\| \leq \|f\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

Conclusione come prima.
 — o — o —

Caso 3 In $\mathbb{R}^d$, tutto C_c^∞ , con matrice $A(x)$ generica

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx$$

Come prima $\varphi = u_{x_i x_i}$

$$\text{RHS} \leq \|f\| \cdot \|u_{x_i x_i}\| \leq \|f\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= - \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du, Du_{x_i x_i} \rangle dx && \text{(per sicurezza scrivere con indici)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \langle D_{x_i} (A(x) Du), Du_{x_i} \rangle dx \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A_{x_i}(x) Du, Du_{x_i} \rangle dx}_{\geq - \|A_{x_i}\|_{C^1} \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\|} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du_{x_i}, Du_{x_i} \rangle dx}_{\geq \nu \|Du_{x_i}\|^2 \text{ (ellitticit\`a)}}
\end{aligned}$$

Mettendo insieme:

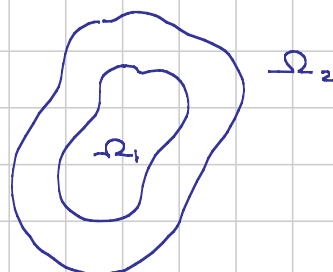
$$\begin{aligned}
\nu \|Du_{x_i}\|^2 &\leq \text{LHS} + \|A\|_{C^1} \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\| \\
&\leq \text{RHS} + \quad " \\
&\leq \|f\| \cdot \|Du_{x_i}\| + \|A\|_{C^1} \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\|
\end{aligned}$$

Semplificando ho la tesi (poi faccio variare $i = 1, \dots, d$)

Caso 4 $\Omega = \mathbb{R}^d$, $A(x) \equiv \text{Id}$, u e f in C^∞ , ma senza supporto compatto

Prendiamo $\Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \mathbb{R}^d$
e scegliamo una ψ di classe C^∞
tale che

$$\begin{aligned}
\psi &\equiv 1 && \text{in } \Omega_1 \\
\psi &\equiv 0 && \text{fuori da } \Omega_2 \\
0 &\leq \psi \leq 1 && \text{in mezzo}
\end{aligned}$$



Poniamo $v(x) = \psi(x) \cdot u(x)$
e vediamo cosa risolve

$$\Delta v(x) = \Delta \psi \cdot u + \psi \cdot \underbrace{\Delta u}_{\neq} + 2 \langle D\psi, Du \rangle$$

↑
Laplaciano del
prodotto

$$=: g$$

Ora v e g hanno supporto compatto in $\mathbb{R}^d$ e

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\Omega_2)} &\leq \text{cost} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega_2)} + 1 \cdot \|\neq\|_{L^2(\Omega_2)} + \text{cost} \|Du\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \text{cost} \{ \|\neq\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega_2} \} \end{aligned}$$

Dai risultati precedenti sappiamo che

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega_1)} &\stackrel{\substack{\uparrow \\ u \equiv v \text{ in } \Omega_1}}{=} \|D^2 v\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \|D^2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \text{cost} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \begin{array}{l} \nearrow \Omega_2 \\ \uparrow \\ \text{tipo } d \text{ o qualcosa di simile} \end{array} \\ &\leq \text{cost} \{ \|\neq\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega_2} \} \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{dipende anche da } \Omega_1 \text{ e } \Omega_2 \\ \text{— } \circ \text{ — } \circ \text{ —} \end{array} \end{aligned}$$

Oss. L'ultimo caso funziona ugualmente con Ω generico,
più di prendere $\Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \Omega$.
— $\circ$ — $\circ$ —

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 45

Titolo nota

19/11/2019

Def. (Rapporto incrementale - Derivata discreta)

Siano $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\varepsilon \neq 0$ numero reale
Poniamo

$$D_\alpha^\varepsilon u(x) := \frac{u(x + \varepsilon \alpha) - u(x)}{\varepsilon |\alpha|}$$

Se $\alpha = e_i$ (i -esimo vettore base canonica) lo chiamiamo $D_{x_i}^\varepsilon u$

Se u è definita in aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $D_\alpha^\varepsilon u$ è ben definita in $\Omega' \subset\subset \Omega$ quando $|\varepsilon|$ è piccolo.

Oss. (Proprietà facili di D_α^ε)

- È lineare in u (da dove a dove?)
- Conserva la regolarità, cioè $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, allora $D_\alpha^\varepsilon u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$
- Commuta con le derivate deboli, cioè

$$D^\beta (D_\alpha^\varepsilon u) = D_\alpha^\varepsilon (D^\beta u) \quad \text{per ogni multiindice } \beta$$

- Vale una specie di regola per il prodotto

$$D_\alpha^\varepsilon (uv)(x) = u(x) D_\alpha^\varepsilon v(x) + v(x + \varepsilon \alpha) D_\alpha^\varepsilon u(x)$$

↑ ↑

(Aggiungo e tolgo un termine misto)

- Vale una specie di chain-rule: se $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$D_\alpha^\varepsilon [\phi \circ u](x) = \phi'(\xi) D_\alpha^\varepsilon u(x)$$

↑
p.to compreso tra $u(x)$ e $u(x + \varepsilon \alpha)$

Proposizione Stesso setting di sopra

(1) Per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$ vale se $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|D_{x_i}^\varepsilon u\|_{L^p} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

(2) Vale una specie di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) D_\alpha^\varepsilon \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} D_\alpha^{-\varepsilon} u(x) \cdot \varphi(x) dx$$

per tutte le u e φ per cui hanno senso gli integrali, ad esempio

• $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

• $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (o esponenti coniugati)

Dim. (1) Solito conto! Assumiamo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e allora

$$\begin{aligned} |u(x + \varepsilon e_i) - u(x)| &= |\psi(1) - \psi(0)| & \psi(t) &:= u(x + t\varepsilon e_i) \\ &\leq \int_0^1 |\psi'(t)| dt & \psi'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \cdot \varepsilon \\ &= |\varepsilon| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \right| dt & & \uparrow \frac{1}{p'} \\ &\leq |\varepsilon| \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \right|^p dt \right\}^{1/p} \cdot 1 \end{aligned}$$

Divido per ε ed elevo alla p e integro

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D_{x_i}^\varepsilon u(x)|^p dx \leq \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \right|^p dx = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p$$

$\uparrow$ y
 Fubini- $dx = dy$
 Tonelli

(2) Fare il conto!

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) D_\alpha^\varepsilon \varphi(x) dx = \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(\overset{y}{x+\varepsilon\alpha}) dx - \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(x) dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(y-\varepsilon\alpha) \varphi(y) dy - \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \varphi(y) dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \frac{u(y-\varepsilon\alpha) - u(y)}{-\varepsilon|\alpha|} dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) D_\alpha^{-\varepsilon} u(y) dy.$$

— o — o nei casi estremi qualcosa resta vero
↓ ↓ ma non tutto

Teorema Siano $d \geq 1$ intero, $p \in (1, +\infty)$.

Allora sono equivalenti i seguenti:

(1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

(2) $D_{x_i}^\varepsilon u \rightarrow$ qualcosa in $L^p(\mathbb{R}^d)$ forte $\forall i=1, \dots, d$
 $\uparrow$ sarà $\frac{\partial u}{\partial x_i}$

(3) $D_{x_i}^\varepsilon u \rightarrow$ qualcosa in $L^p(\mathbb{R}^d)$ debole $\forall i=1, \dots, d$

(4) $\|D_{x_i}^\varepsilon u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ sono limitati, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall \varepsilon \neq 0} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \|D_{x_i}^\varepsilon u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq M.$$

Dim. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) seguito da fatti standard

(1) $\Rightarrow$ (2) : esercizio interessante (imitare dim. conv. convulsioni)

(4) $\Rightarrow$ (1). Dalla limitatezza + compattanza debole palle ($p > 1$) segue che esiste $\varepsilon_n \rightarrow 0$ t.c.

$$D_{x_i}^{\varepsilon_n} u \rightharpoonup v \quad \text{debole } L^p(\mathbb{R}^d)$$

Claim: v è la deriv. debole in direzione e_i

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_{x_i}^{\varepsilon_n} u(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) D_{x_i}^{-\varepsilon_n} \varphi(x) dx$$

$\downarrow$ conv. debole $\downarrow$ $\downarrow$ pure uniform.

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Questo dice che v è la deriv. debole

Teorema (Regolarità interna, caso base)

Siano $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tali che $\Delta u = f$ in senso debole, cioè

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dim. Step 1 La relazione di sd. debbe vale $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$
(ogni $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ha approx deluxe con $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Step 2 Uso $\varphi(x) = D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^{\varepsilon} u(x)$ che sta in $H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\text{RHS} = \int f(x) D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^{\varepsilon} u(x) dx$$

$$\leq \|f\| \cdot \|D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^{\varepsilon} u(x)\|$$

$$\leq \|f\| \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x_i}^{\varepsilon} u(x) \right\|$$

$$\leq \|f\| \cdot \|D D_{x_i}^{\varepsilon} u(x)\|$$

$$= \|f\| \cdot \|D_{x_i}^{\varepsilon} (Du(x))\|$$

$$\text{LHS} = - \int \langle Du, D D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^{\varepsilon} u \rangle dx$$

$$= - \int \langle Du(x), D_{x_i}^{-\varepsilon} D D_{x_i}^{\varepsilon} u(x) \rangle dx$$

$$= \int \langle D_{x_i}^{\varepsilon} Du(x), D D_{x_i}^{\varepsilon} u(x) \rangle dx$$

$$= \|D_{x_i}^{\varepsilon} Du\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Mettenendo insieme troviamo

$$\|D_{x_i}^{\varepsilon} Du\| \leq \|f\|$$

Questo per caratterizzazione ci dice che tutte le derivate seconde
con x_i dentro stanno in L^2 . In 3 passaggi concludo

— o — o —

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 46

Note Title

19/11/2019

Regolarità fino al bordo

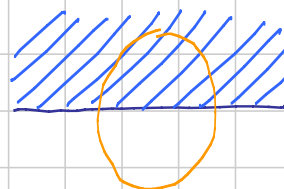
Caso modello $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ $f \in L^2(\mathbb{R}_+^d)$
 $\uparrow$ DBC

Assumiamo $\Delta u = f$ in senso debole in $\mathbb{R}_+^d$.

Allora $u \in H^2(\mathbb{R}_+^d)$ con stima $\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$
 — o — o —

Diamo stima a priori (assumendo tutto C^∞ e nullo fuori da un compatto di $\mathbb{R}^d$)

Per $i = 1, \dots, d-1$ lavoro come sempre, cioè
 uso $\varphi = u_{x_i x_i}$ ottenendo



$$\|D u_{x_i}\| \leq \|f\|$$

Questo mi stima tutte le derivate seconde tranne $u_{x_d x_d}$.

Posso usare quella φ ? Posso permettermi $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ o per approssimazione $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$.

si! Visto che $i \leq d-1$, sto facendo la derivata 2^a in direzione tangenziale all'iperpiano, quindi è la derivata seconda della funzione nulla!!

Guadagnare $u_{x_d x_d}$ è banale!! Infatti

$$u_{x_d x_d} = \Delta u - \sum_{i=1}^{d-1} u_{x_i x_i} \in L^2 \quad \text{☺}$$

— o — o —

Come si rende rigoroso? Per $i = 1, \dots, d-1$ uso i rapporti incrementali come sempre, che stanno su $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$.

Per conquistare l'ultima derivata non posso usare il Laplaciano. Per ipotesi

$$-\int_{\mathbb{R}_+^d} \langle Du, D\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^d} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \\ & = + \sum_{i=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto

$$-\int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} dx = \int_{\mathbb{R}_+^d} f \varphi - \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi$$

Questo ci dice che

$\frac{\partial u}{\partial x_d}$ ammette derivata debole in direzione x_d
data dalla formula che ci si aspetta.

Caso generale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$

Supponiamo che

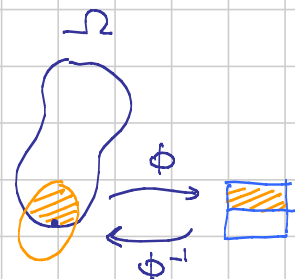
- (i) $\partial\Omega$ compatto e di classe C^2
- (ii) $\Delta u = f$ in Ω in senso debole.

Allora $u \in H^2(\Omega)$ e vale la stima

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{1,2,\Omega} \}$$

Stesso discorso vale per $\operatorname{div} (A(x) Du) = f$ con $A(x) \in C^1$.

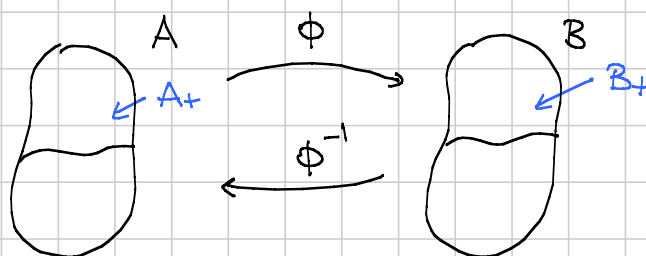
Dim. Con la solita partizione dell'unità scrivo u come somma di funzioni u_i che vivono in un aperto $\Omega \cap U_i$ che viene mappato nel cubo standard da una ϕ di classe C^2 .



Domanda generale: come si trasportano le equazioni mediante diffeomorfismi.

Contesto generale

- ϕ invertibile
- ϕ di classe C^2
- J_ϕ e $J_{\phi^{-1}}$ limitati su A e B rispettivamente
- $\phi: A \rightarrow B$, $\phi: A^+ \rightarrow B^+$, $\phi: \text{confine} \rightarrow \text{confine}$



u risolve $\operatorname{div} (\hat{A}(x) Du) = f$ in A

Pongo $v(y) = u(\phi^{-1}(y))$. Domanda: cosa risolve $v(y)$?

Definiamo v , $\hat{B}$, e g in B in modo tale che

$$v(\phi(x)) = u(x)$$

$$g(\phi(x)) = \frac{f(x)}{|\operatorname{Det} J_\phi(x)|}$$

$$\hat{B}(\phi(x)) = \frac{J_\phi(x) \hat{A}(x) [J_\phi(x)]^t}{|\operatorname{Det} J_\phi(x)|}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga}}}{Du(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga}}}{Dv(\phi(x))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{J_\phi(x)}$$

Vonrei u , g e $\hat{B}$ definite in B , quindi in realtà sto ponendo

$$u(y) := u(\phi^{-1}(y))$$

$$g(y) := \frac{f(\phi^{-1}(y))}{|\det J_\phi(\phi^{-1}(y))|}$$

$$\hat{B}(y) := \dots$$

Claim: u risolve in senso debole $\operatorname{div}(\hat{B}(y) Du) = g$
in B .

Dim Ipotesi $-\int_A \langle \hat{A}(x) Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_A f(x) \varphi(x) dx$

Tesi: $-\int_B \langle \hat{B}(y) Du(y), D\psi(y) \rangle dy = \int_B g(y) \psi(y) dy$

dove $\varphi \in C_c^\infty(A)$ e $\psi \in C_c^\infty(B)$

Uso l'ipotesi con $\varphi(x) := \psi(\phi(x))$ $D\varphi(x) = D\psi(\phi(x)) J_\phi(x)$

Ora cambiamo variabile negli integrali

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_B g(y) \psi(y) dy = \int_A g(\phi(x)) \psi(\phi(x)) |\det J_\phi(x)| dx \\ &\quad \text{tesi} \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad y = \phi(x) \\ &= \int_A f(x) \varphi(x) dx = \text{RHS (ipotesi)} \quad \text{☺} \end{aligned}$$

$$- \text{LHS (tesi)} = \int_B \langle \hat{B}(y) Dv(y), D\psi(y) \rangle dy$$

$$= \int_B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga}}}{Dv(y)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{\hat{B}(y)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga trasposta}}}{[D\psi(y)]^t} dy$$

$$= \int_A Dv(\phi(x)) \hat{B}(\phi(x)) [D\psi(\phi(x))]^t |\text{Det } J_\phi(x)| dx$$

$$= \int_A \underbrace{Dv(\phi(x)) J_\phi(x)}_{Du(x)} \hat{A}(x) \underbrace{[J_\phi(x)]^t [D\psi(\phi(x))]^t}_{[D\psi(\phi(x)) J_\phi(x)]^t = [D\psi(x)]^t} dx$$

$$= \int_A Du(x) \hat{A}(x) [D\psi(x)]^t dx = -\text{LHS (ipotesi)} \quad \text{☺}$$

Oss: se $\psi \in C_c^\infty(B^+)$, allora $\psi \in C_c^2(A^+)$, ma questo è sufficiente per il conto

Oss. Gli integrali sono in realtà su A_+ e B_+ .

Oss. Dove ho usato $\phi \in C^2$? Mi serve $\hat{B} \in C^1$ e questo richiede $\phi \in C^2$.

Poi serve che $v \in H^2 \Rightarrow u \in H^2$, e anche qui serve.

Oss. Serve $\hat{B}$ ellittica se $\hat{A}$ è ellittica.

Esercizio di geometria 1: se A è definita positiva e M è invertibile, allora
 $MA M^t$
 è definita positiva.