

A.A. 2019/2020
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Presentazione degli obiettivi del corso. Introduzione al calcolo delle variazioni: minimo vs punti di minimo. Metodo indiretto nel calcolo delle variazioni: variazione prima di un funzionale lungo una curva, derivata secondo Gateaux, condizioni necessarie di minimalità. Metodo diretto nel calcolo delle variazioni: nozione di convergenza, compattezza, semi-continuità, coercività, teorema di Weierstrass e varianti. (audio mancante)	6
Lezione 02. Funzionali integrali e Lagrangiane. Primi esempi di applicazione del metodo diretto: studio esplicito di tre casi modello di funzionali integrali dipendenti da potenze della derivata. Forme integrali e differenziali della variazione prima. Equazione di Eulero-Lagrange.	12
Lezione 03. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (FLCV), FLCV a media nulla, lemma di Du Bois Reymond (setting classico e setting Lebesgue): enunciati, possibili dimostrazioni, discussione di possibili varianti.	17
Lezione 04. Nascita delle condizioni al bordo per le equazioni di Eulero-Lagrange. Esempi che portano a condizioni di Dirichlet, di Neumann, e periodiche. Esempio con derivate di ordine superiore al primo.	22
Lezione 05. Equazione di Eulero-Lagrange per una Lagrangiana generale: forme integrali, forma differenziale classica, alla Du Bois Reymond, alla Erdmann per il caso autonomo. Discussione delle ipotesi di regolarità necessarie per le varie forme. Estensione al caso di Lagrangiane dipendenti da derivate di ordine superiore. . . .	27
Lezione 06. Condizioni sufficienti di minimalità: via convessità e via utilizzo di un funzionale ausiliario. Esistenza e non esistenza di minimi nel caso del doppio pozzo.	33
Lezione 07. Variazione prima di funzionali con integrali multipli: integrale di Dirichlet e Laplaciano, equazione di Eulero-Lagrange in forma di divergenza, derivata normale al bordo e nascita di condizioni al bordo di Neumann.	39
Lezione 08. Variazione interna (orizzontale) di un funzionale integrale. Argomento di troncamento per i funzionali vs principio del massimo per le corrispondenti equazioni di Eulero.	44
Lezione 09. Definizione di spazio di Hilbert. Continuità forte di norma e prodotto scalare. Definizione di base ortonormale (sistema ortonormale completo). Ogni spazio di Hilbert separabile ammette una base Hilbertiana. Componenti di una vettore rispetto ad una base Hilbertiana. Rappresentazione di norma e prodotto scalare in termini di componenti: enunciato e lemmi utili per la dimostrazione. . .	48

Lezione 10. Dimostrazione dei due teoremi principali sulle basi ortonormali. Convergenza debole in spazi di Hilbert: definizione, prime proprietà, primi esempi. Per le successioni limitate la convergenza debole è equivalente alla convergenza delle componenti rispetto ad una base Hilbertiana.	54
Lezione 11. Passaggio al limite nel prodotto scalare con una convergenza forte e una debole. Semi-continuità della norma rispetto alla convergenza debole in uno spazio di Hilbert. Compattatezza debole delle palle negli spazi di Hilbert separabili. Osservazione che non è lecito scambiare limiti e serie. Assoluta convergenza di serie in spazi di Banach. Accenno alle basi Hilbertiane in spazi non separabili.	60
Lezione 12. L^2 come spazio di Hilbert. Dimostrazione elementare della completezza dello spazio l^2 . Esempio di successione di funzioni che converge debolmente ma non fortemente in L^2	66
Lezione 13. Definizione W di derivata debole. Prime proprietà: unicità, linearità, compatibilità con il caso classico, esempi di esistenza e non esistenza. Stabilità per passaggio al limite. Una funzione coincide quasi ovunque con una primitiva della sua derivata W -debole.	72
Lezione 14. Continuità e valori puntuali di una funzione che ammette derivata W -debole. Definizione W di spazi di Sobolev (ordine 1 in un intervallo). Le funzioni di Sobolev sono Holderiane. Definizione H di derivata debole e definizione H di spazi di Sobolev. Equivalenza tra definizione W e H , sia per le derivate deboli, sia per gli spazi di Sobolev.	78
Lezione 15. Road map del metodo diretto: formulazione debole negli spazi di Sobolev, compattezza dei sottolivelli rispetto ad un'opportuna nozione di convergenza, semicontinuità rispetto alla stessa nozione di convergenza, recupero della regolarità (ELE in forma debole, guadagno delle prime derivate, bootstrap). Primo esempio di applicazione.	84
Lezione 16. Ulteriori esempi di applicazione del metodo diretto. Stime dal basso sulla Lagrangiana vs stime integrali sulle derivate. Stime uniformi sulle funzioni ottenute a partire da stime integrali (via teorema della media integrale). Semicontinuità debole per funzionali integrali dipendenti dalla derivata vs convessità della Lagrangiana.	90
Lezione 17. Approccio variazionale ai problemi al bordo per equazioni differenziali di ordine due: esistenza, regolarità, unicità sotto ipotesi di monotonia/convessità (dimostrata sia via unicità del punto di minimo, sia guardando direttamente l'equazione), comportamento qualitativo.	96
Lezione 18. Adattamento dell'approccio variazionale ad equazioni con diverse condizioni al bordo di tipo Dirichlet/Neumann. Esempio di non unicità della soluzione per un problema di Dirichlet.	102

- Lezione 19.** Definizione di convergenza debole in L_p . In spazi di misura finita la convergenza debole L_1 è la più debole di tutte. Per le successioni limitate basta testare la convergenza debole su un insieme di funzioni test con Span denso. Enunciato della debole compattezza delle palle in L_p (e controesempio per $p=1$). Lemma di approssimazione monotona per funzioni convesse. Semicontinuità rispetto alla convergenza debole sotto ipotesi di convessità. 108
- Lezione 20.** Limitatezza in L_p e debole convergenza in L_1 implicano debole convergenza in L_p . Dimostrazione della debole compattezza delle palle in L_p sotto ipotesi aggiuntive. Esempio di problema di minimo per un funzionale con crescita non quadratica nella derivata. Mancanza di coercività vs regolarità Holderiana della derivata dei minimi. 114
- Lezione 21.** Identità del parallelogrammo. Caratterizzazione delle norme derivanti da un prodotto scalare (Jordan-Fréchet-von Neumann). Proiezione su un convesso chiuso: esistenza, unicità, caratterizzazione, 1-Lipschitzianità. 119
- Lezione 22.** Proiezione su sottospazi chiusi: linearità e caratterizzazione. Ortogonale di un sottospazio. Somme dirette ortogonali. Separazione stretta (mediante iperpiani) di un punto da un convesso. Chiusura forte + convessità implica chiusura debole. Semicontinuità forte + convessità implica semicontinuità debole. 126
- Lezione 23.** Metodo dei moltiplicatori di Lagrange: enunciato in termini di variazione prima e dimostrazione via teorema della funzione implicita. Disuguaglianza di Poincaré in un intervallo. Applicazione a problemi con crescita critica. 132
- Lezione 24.** Esempi finali di studio di funzionali integrali: semicontinuità forte via lemma di Fatou, approccio variazionale all'esistenza di soluzioni periodiche per un'equazione differenziale, doppia interpretazione degli enunciati che legano la convessità della Lagrangiana alla semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza debole. . . 138

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 01

Note Title

26/09/2019

3 punti: $\rightarrow$ Motivazioni e Calcolo delle Variazioni
 $\rightarrow$ Spazi di SOBOLEV
 $\rightarrow$ Introduzione all'Analisi Funzionale
 — o — o —

Motivazioni e Calc. Var.

Sia X un insieme, sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ (talvolta $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) una funzione.

Problema Stabilire se esiste

$$\min \{ F(x) : x \in X \}$$

minimo valore, quindi
un numero

(se esiste è UNICO)

ed eventualmente

$$\operatorname{Argmin} \{ F(x) : x \in X \} = \{ x \in X : F(x) = \min \}$$

(possono essere NON unici)

= p.ti di minimo

Se il minimo non esiste, trovare l'inf. e come avvicinarsi all'inf, cioè una succ. $\{x_n\} \subseteq X$ t.c.

$$F(x_n) \rightarrow \inf \{ F(x) : x \in X \}$$

Tale succ. si chiama minimizzante o "infizzante".

Due metodi: $\rightarrow$ METODO INDIRETTO
 $\rightarrow$ METODO DIRETTO

METODO INDIRETTO

Roadmap: ① Cerco di capire chi sarebbero i p.ti di min.
 ② Dimostro che lo sono

Esempio $X = \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 8y$

$$\textcircled{1} \nabla f(x,y) = 0 \quad \leadsto \quad \begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y-8=0 \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=4 \end{matrix}$$

② Provo a dim. che $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ è p.to di min. unico.
 Ogni altro competitore (x, y) lo posso scrivere come
 $(x, y) = (x_0 + R, y_0 + k)$

Sostituisco:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0 + R, y_0 + k) \\ &= \underbrace{x_0^2 + 2x_0R + R^2}_{\geq f(x_0, y_0)} + \underbrace{y_0^2 + 2y_0k + k^2}_{=0 \text{ perché sono eq. risolte da } x_0 \text{ e } y_0} + \underbrace{2x_0 + 2R - 8y_0 - 8k}_{\geq 0} \\ &= \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\geq f(x_0, y_0)} + \underbrace{R(2x_0 + 2) + k(2y_0 - 8)}_{=0 \text{ perché sono eq. risolte da } x_0 \text{ e } y_0} + \underbrace{R^2 + k^2}_{\geq 0} \\ &\geq f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $R=k=0$, cioè $x=x_0$
 $y=y_0$.

METODO DIRETTO

Roadmap: ① Dimostro direttamente che min. esiste
 ② Poi eventualmente lo trovo.

Esempio di sopra

Considero $f(x,y)$ come sopra e osservo che

$$\lim_{|x|^2+|y|^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

Quindi per Weierstrass generalizzato (vedi Oss. Analisi 2) essendo f continua, ammette min. su tutto $\mathbb{R}^2$.

Una volta che min. esiste, procedo come ① di prima.

— 0 — 0 —

Metodo indiretto in generale

→ Variazione prima lungo una curva

→ Derivata secondo GATEAUX



Sia X insieme e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$.

Sia $\delta > 0$ e sia $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$,

cioè una curva passante per x_0

Posso considerare

$$(-\delta, \delta) \ni t \rightarrow F(\gamma(t)) \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) := F(\gamma(t))$$

Supponiamo che $\varphi'(0)$ esista (è Analisi 1). Allora la diciamo var. prima di F in x_0 lungo γ e pongo

$$\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$$

Teorema Se x_0 è pto di min. per F , allora

$$\delta F(x_0, \gamma) = 0$$

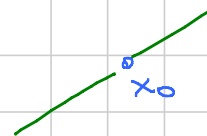
per ogni curva γ per cui esiste.

Caso speciale : X è uno sp. affine con sp. vett. di rif. V
(la diff. tra 2 el. di X sta in V)

Dato $x_0 \in X$ e $v \in V$ posso considerare

$$\varphi(t) := F(x_0 + tv)$$

retta per x_0 in direz. $v \in V$ (la $\gamma(t)$)



$$\delta F(x_0, v) := \varphi'(0) \text{ purch  esista}$$

↑
variaz. prima
in direzione v = derivato di G . (deriv. direzionale)

Metodo diretto in generale Sia X un insieme.

Una nozione di conv. in X vuol dire "elenicare tutte le succ. conv. ed i relativi limiti".

Pi  formalmente, poniamo

$$\text{Seq}(X) = \{ \text{succ. a valori in } X, \text{ cio  } f: \mathbb{N} \rightarrow X \}$$

Una noz. di conv.   un qualunque sottoinsieme di

$$\text{Seq}(X) \times X$$

Non chiedo nulla di speciale (ascoltare video).

Def. Si dice che un sottoinsieme $K \subseteq X$   compatto se ogni succ. $\{x_n\} \subseteq K$ ammette s.succ. che converge ad un elemento di K (cio  che compare nell'elenco sopra).

Def. Una funzione $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice semicontinua infer. (sci) se per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq F(x_\infty).$$

Teorema (Weierstrass) Sia X un insieme e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) X compatto

(ii) F sci

Allora

$$\min \{ F(x) : x \in X \}$$

esiste.

Dim. Per definizione di inf. esiste $\{x_n\} \subseteq X$ t.c.

$$F(x_n) \rightarrow \inf \{ F(x) : x \in X \} = I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Poiché X è CPT esiste $n_k \uparrow +\infty$ ed esiste $x_\infty \in X$ t.c.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

Ma allora

$$I \leq F(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = I$$

$\uparrow$ def. di inf. $\uparrow$ sci perché $F(x_n)$ ha lim. $\uparrow$ def di $\{x_n\}$

Da cui $F(x_\infty) = I$ (e $I \in \mathbb{R}$).

Def. Sia X insieme e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Si dice che F è COERCIVA se esiste $K \subseteq X$ compatto t.c.

$$\inf \{ F(x) : x \in X \} = \inf \{ F(x) : x \in K \}$$

Teorema (W. generalizzato) X e F come sopra.

Supponiamo che esista una uof. di conv. su X per cui

(i) F è coerata

(ii) F è SCI.

Allora esiste il minimo.

Dm. (i) + (ii) $\Rightarrow$ esiste $\min \{ F(x) : x \in K \}$, ma questo lo è pure in generale.

Oss. Di solito la coerività segue dall'esistenza di un sottolivello non vuoto e contenuto in un cpt., più precisamente

$\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists K \subseteq X$ compatto t.c.

$\emptyset \neq \{ x \in X : F(x) \leq M \} \subseteq K$

(la battaglia per il min. si gioca nel sottolivello)

Oss. Le due richieste cpt + SCI sono in concorrenza

- Se metto tante succ. conv. ho CPT + facile e SCI + diff.
- Se metto poche succ. conv. è il contrario.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 02

Note Title

26/09/2019

Funzionali integrali

- Cinque sinonimi : → Funzione
 → Funzionale (partenza: sp. di funzioni, arrivo $\mathbb{R}$)
 → Mappa
 → Applicazione (retrogrado linearità)
 → Operatore (roba strana in partenza ed arrivo)

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

sul bordo se derivate
sono dx e dx

$$\mathbb{X} = \{u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \text{ t.c.} \\ u(a) = A, u(b) = B\}$$

↑ dati

$F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx$$

dove $L: (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con una certa regolarità.

↑ LAGRANGIANA

posizione

Di solito si indica con $L(x, s, p)$

↑ velocità

Esempi superclassici

$$F(u) = \int_a^b u'(x)^2 dx$$

$$G(u) = \int_a^b |u'(x)| dx$$

$$H(u) = \int_a^b |u'(x)|^{1/2} dx$$

Esempio 1

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}(x)^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{u \in C^1([0,1]), u(0)=3, u(1)=7}_{\times} \right\}$$

$\times$ è uno sp. affine con sp. vett. di riferimento

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0 \}$$

Quindi posso calcolare $\varphi(t) = F(u + tv)$

$$\varphi(t) = \int_0^1 [\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)]^2 dx = \int_0^1 \dot{u}(x)^2 + 2t \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_0^1 \dot{v}^2$$

La derivata in t si calcola banalmente

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = 2 \int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx$$

SE $u_0(x)$ è un p.to di min., allora $\delta F(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$, cioè

$$\boxed{\int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx = 0} \quad \forall v \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } v(0) = v(1) = 0$$

prima forma integrale dell'eq. di EULERO

Integro per parti e ottengo

$$\underbrace{[\dot{u}(x) v(x)]_0^1}_0 - \int_0^1 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0$$

perché $v(0) = v(1) = 0$

↑ Sarebbe sapere $u \in C^2$, ma
ME NE FREGO

$$\boxed{\int_0^1 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0} \quad \forall v \in V$$

2ª forma integrale
di Eulero

Da questa vorremmo dedurre che

$$\ddot{u}(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ELE in forma diff.

ELE : Equazione di EULERO - LAGRANGE

Il passaggio è abusivo, ma ME NE FREGO.

Risolve $\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ u(0) = 3 \\ u(1) = 7 \end{cases}$ ELE diff. conl. date BC (Boundary Conditions)

Esiste un'unica soluzione $u_0(x) = 4x + 3$

Dimostro rigorosamente che $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Ogni altro competitor $u \in \mathbb{X}$ lo posso scrivere come

$$u(x) = u_0(x) + v(x)$$

$\uparrow \in V$ $v = u - u_0$

Allora

$$\begin{aligned} F(u_0 + v) &= \int_0^1 (\dot{u}_0(x) + \dot{v}(x))^2 dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \dot{u}_0(x)^2 dx}_{F(u_0)} + \underbrace{2 \int_0^1 \dot{u}_0(x) \dot{v}(x) dx}_0 + \underbrace{\int_0^1 \dot{v}(x)^2 dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

" perché $u_0(x)$ risolve la 1^a forma integrale di Eulero
(ora i passaggi sono giustificati)

$$\geq F(u_0)$$

e vale il segno di uguale se e solo se $\int_0^1 \dot{v}(x)^2 dx = 0$

il che accade se e solo $\dot{u}(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, cioè $u(x)$ costante, cioè $u(x) \equiv 0$ perché $u(0) = u(1) = 0$.
Questo dim. che u_0 è l'unico pto di min.

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^1 |\dot{u}(x)| dx : u \in \mathbb{X} \text{ di prima} \right\}$

$$u(1) - u(0) = \int_0^1 \dot{u}(x) dx \leq \int_0^1 |\dot{u}(x)| dx = G(u)$$

Questo dimostra che $G(u) \geq u(1) - u(0) = 4$
e vale l'uguaglianza se e solo se $\dot{u}(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, 1]$
(dimostrare per bene che è un se e solo se).

Quindi la retta $u_0(x) = 4x + 3$ è UN pto di min, ma ce ne sono infiniti altri.

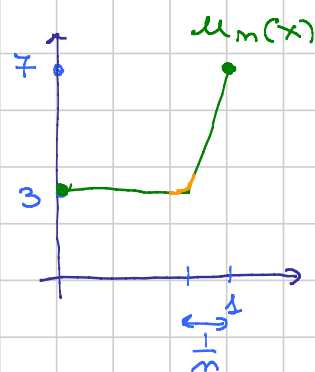
Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 |\dot{u}(x)|^{1/2} dx : u \in \mathbb{X} \text{ di prima} \right\}$

Si può dimostrare che min non esiste e $\inf = 0$.
(se $\inf = 0$, è ovvio che min N.E. perché dovrebbe essere cost.)
Per dim. $\inf = 0$, trovo succ. c.a.f.f.zante.

Fregandosene che $u_n(x)$ non è C^1 ,
calcolo

$$\begin{aligned} H(u_n) &= \int_0^1 |\dot{u}_n(x)|^{1/2} dx \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |4n|^{1/2} dx = 2\sqrt{n} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

↑ lunghezza intervallo



Per ovviare alla non C^1 -ità, basta fare un piccolo raccordo dalle panti di $1 - \frac{1}{n}$ (sistemare i dettagli).

Punto della situazione: Lagrangiane che dipendono solo da p

$L(p) = p^2$ esistenza e unicità STRETT. CONV. 😊

$L(p) = |p|$ esist. senza unicità CONV. NON STRETT. $\leadsto$ guai

$L(p) = \sqrt{|p|}$ Non esistenza NON CONV. ☹

Spazi di ambientazione

Se invece di lavorare in $C^1([0,1])$ lavoro in $C^0([0,1]) + C^1$ a tratti, cambia qualcosa?

Risposta: sotto ipotesi decenti NO, nel senso che l'inf. è lo stesso.

Lemma di approx. Data $u \in C^1$ a tratti in $[a,b]$

esiste $\{u_m\}$ successione di funzioni davvero C^1 t.c.

$u_m \rightarrow u$ unif. in $[a,b]$

$\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}$ framme in un numero finito di punti

$\{\dot{u}_m(x)\}$ equilimitate

Se $L(x,s,p)$ è continua, questo basta per concludere che

$$\int_a^b L(x, u_m(x), \dot{u}_m(x)) dx \rightarrow \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

e questo dice che gli inf. sono uguali.

Isb. Analisi Matematica

LEZIONE 03

Note Title

30/09/2019

FLCV : Fundamental Lemma in the Calculus of Variations

FLCV a media nulla

Lemma DBR - Du Bois-Reymond

FLCV (caso classico) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

funzione test

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

a supporto compatto

Allora $f(x) = 0$ per ogni
 $x \in \Omega$

cioè $\text{clos}\{x \in \Omega: \varphi(x) \neq 0\}$
è un cpt. contenuto in Ω

FLCV (caso Lebesgue) Tutto uguale, ma assumo solo

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

$$\text{cioè } f \in L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega$$

richiesta minimale per dare
senso all'ipotesi

$\text{clos}(\Omega')$ è cpt. $\subseteq \Omega$.

FLCV a media nulla Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

continua (caso classico) oppure $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (caso Lebesgue)

Supponiamo che $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

a media nulla, cioè t.c. $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$.

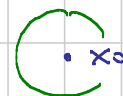
Allora $f(x)$ è costante in Ω , cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = c$
per ogni $x \in \Omega$ (caso classico) o per quasi ogni $x \in \Omega$ (caso L.)

Dim (FLCV caso classico) Per assurdo.

Se fosse falso, allora WLOG (without loss of generality) esiste $x_0 \in \Omega$ t.c.

$$f(x_0) = \alpha > 0$$

Per continuità esiste $r > 0$ t.c.



$$f(x) \geq \frac{\alpha}{2} \quad \forall x \in \bar{B}(x_0, r)$$

Ora basta considerare $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.c.

- $\varphi(x) = 0$ se $x \notin B(x_0, r)$
- $\varphi(x) = 1$ se $x \in B(x_0, \frac{r}{2})$
- $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ per ogni $x \in \Omega$

} esercizio di
Analisi 2

A questo p.to

$$f \cdot \varphi \geq 0 \text{ in } B(x_0, r)$$

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx = \int_{B(x_0, r)} f(x) \cdot \varphi(x) dx \geq \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} f(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$\nearrow$
 $\varphi(x) = 0$ fuori

$$\geq \frac{\alpha}{2} \text{ meas}(B(x_0, \frac{r}{2}))$$

$$\uparrow$$

$$\varphi(x) \equiv 1 \text{ in } B(x_0, \frac{r}{2})$$

$$f(x) \geq \frac{\alpha}{2}$$

Idea per caso Lebesgue: se

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \text{io vorrei tanto prendere } \varphi(x) = f(x)$$

Non posso, ma quasi con un procedimento di approssimazione.

Dim (FLCV caso Lebesgue) Considero un qualunque $\Omega' \subset\subset \Omega$ (basta anche una palla). Dico che esiste una successione

$\{\varphi_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega')$ tale che

- $-1 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \Omega'$
- $\varphi_m(x) \rightarrow \text{sig}(f(x))$ per quasi ogni $x \in \Omega'$

Dato per buono questo, sappiamo per ipotesi che

$$\int_{\Omega'} f(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

è come $\int_{\Omega'} f(x) dx \xrightarrow{\text{convergenza dominata}}$

$$\int_{\Omega'} f(x) \cdot \text{sign}(f(x)) dx = 0$$

$$\int_{\Omega'} |f(x)| dx$$

Dall'essere l'ultimo $= 0$ segue la tesi, cioè $f = 0$ q.o. in Ω' e concludo perché Ω' è arbitrario.

Idea per il caso a media nulla

Se vale $\int f \varphi = 0 \quad \forall \varphi$ a media nulla, allora vale

$$\int (f - c) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \text{ a media nulla}$$

Scego c t.c. $\int (f - c)$ abbia media nulla e poi "uso" $\varphi = f - c$.

Per la prima richiesta vorrei porre

$$c = \text{media di } f = \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx$$

$\uparrow$ non so se $\uparrow$ non ho assunto
 è finita che esista
 — o — o —

Dim FLCVa media nulla Fisso $\Omega' \subset \Omega$ e pongo

$$c = \frac{1}{\text{meas}(\Omega')} \int_{\Omega'} f(x) dx$$

In questo modo $f - c$ ha media nulla in Ω'

Adesso scelgo d tale che $\text{sign}(f(x)-c) - d$ abbia media nulla in Ω' .

Ora scelgo $\{\varphi_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega')$ tali che

- $-1-d \leq \varphi_m(x) \leq 1-d$ sempre
- $\varphi_m(x) \rightarrow \text{sign}(f(x)-c) - d$ per q.o. $x \in \Omega'$
- $\varphi_m(x)$ abbiano media nulla in Ω' .

Se ci riesce, allora

$$0 = \int_{\Omega'} (f(x)-c) \varphi_m(x) dx = \int_{\Omega'} (f(x)-c) \varphi_m(x) dx$$

e passando al limite ottengo

$$\int_{\Omega'} (f(x)-c) \cdot [\text{sign}(f(x)-c) - d] dx = 0$$

"

$$\int_{\Omega'} |f(x)-c| dx - d \underbrace{\int_{\Omega'} (f(x)-c) dx}_0 = 0$$

Da questo segue che $f(x) \equiv c$ quasi ovunque in Ω' e concludo per l'arbitrarietà di Ω' .

(Ocdio! non è del tutto ovvio perché c dipende da Ω')

Dim classica

Se non fosse vero, esisterebbero due p.ti $x_0 \in \Omega$ e $y_0 \in \Omega$, ed esisterebbe $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0) - c = \alpha > 0$$

$$f(y_0) - c = -\alpha < 0$$

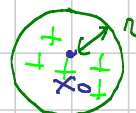
Uso una φ che è

+ in $B(x_0, r)$

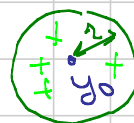
- in $B(y_0, r)$

o altrove

"simmetrica" in modo da avere media nulla.



$$f - c > 0$$



$$f - c < 0$$

Lemma DBR Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua oppure $L^1_{loc}((a,b))$.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$$

Allora f è costante (eventualmente q.o.) in (a,b) .

Dim. abusiva Integro per parti

$$0 = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx$$

$$FLCV \Rightarrow f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \text{ costante}$$

Dim vera Osservo il seguente fatto fondamentale

$$\{ \varphi' : \varphi \in C_c^\infty((a,b)) \} = \{ \varphi \in C_c^\infty((a,b)) : \int_a^b \varphi = 0 \}$$

Per creare la corrispondenza basta fare la primitiva.

Oss. In tutti questi lemmi posso sostituire $C_c^\infty((a,b))$ con una qualunque classe V tale che.

Basta che possa approx. puntualmente q.o. e in maniera equilirmitata il segno mediante funzioni che stanno in V , o anche solo in $\text{Span}(V)$.

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 04

Note Title

30/09/2019

Nascita delle BC (Boundary Conditions)

$$F(u) = \int_0^1 [u^2 + (u-x)^2] dx$$

Morale: se vuole avere poca derivata e "assomigliare a x "

Esempio 1 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]), u(0)=2, u(1)=5 \}$

* è sp. aff. con sp. vet. di rif.

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0 \}$$

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^1 [\dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + (u+tv-x)^2] dx$$

= ... pol. di 2° grado in $t \rightarrow$ calcolo $\varphi'(0)$

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 u' v' dx + 2 \int_0^1 (u-x) v dx$$

Eulero 1ª forma integrale: $v = 0$

11 2ª forma integrale

$$\int_0^1 (-\ddot{u} + u - x) v \, dx = 0 \quad (\text{ho integrato per parti})$$

$$\text{FLCV} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = 2 \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

Si verifica che il pbm. ha sol. unica (Analisi 1)

$$u(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x + x$$

Imponendo le BC trovo in modo unico a e b .

In bella copia considero la soluzione $u_0(x)$ appena trovata e dimostro che è l'unico p.to di univ. poiché

$$F(u) = F(u_0 + tv) = \dots \text{ conti } \dots$$

$$= F(u_0) + 2t \underbrace{\left\{ \int_0^1 [\dot{u}_0 \dot{v} + (u_0 - x)v] dx \right\}}_{=0 \text{ perché integrale per parti e } u_0 \text{ cosa risolve } u_0} + t^2 \underbrace{\int_0^1 [v^2 + \dot{v}^2]}_{\geq 0 \text{ sempre e } = 0 \Leftrightarrow \dots}$$

Achtung! L'eq. che abbiamo trovato per u_0 NON è un pbm. di Cauchy, quindi NESSUNO garantisce esistenza ed unicità della soluzione (vedi Sez. 2018/19)
[Nell'esempio di sopra bastava scrivere il sistema]

Esempio 2 $\min \{ F(u) : u \in C^1, \dots, u(0) = 2 \}$
 $\uparrow$ condizione in un solo estremo

Questa volta $V = \{ v \in C^1 : v(0) = 0 \}$

Come prima arrivo alla prima forma di Eulero

$$\int_0^1 \dot{u} \dot{v} + \int_0^1 (u - x)v = 0 \quad \forall v \in V$$

Integro per parti, ma occhio al bordo

$$\left[\dot{u} v \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 [-\ddot{u} + (u - x)] v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

$$= \dot{u}(1)v(1)$$

Procedo in due fasi

- Fase 1: Considero solo $v \in V$ che soddisfanno anche $v(1) = 0$
Esattamente come prima deduco
 $\ddot{u} = u - x$

- Fase 2: dalla fase 1 so che l'integrale sopra è $= 0$ e quindi la cond. è diventata

$$u'(1)v(1) = 0$$

Basta prendere $v \in V$ con $v(1) \neq 0$ (e ce ne sono) per dedurre che $u'(1) = 0$.

Ho ottenuto

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = 2 & \text{c'era dall'inizio} & \text{DBC} \\ u'(1) = 0 & \text{nata on the road} & \text{NBC} \end{cases}$$

Notazione DBC (DIRICHLET) $u(\text{estremo}) = q.c.$
NBC (NEUMANN) $u'(\text{estremo}) = q.c.$

Non è ovvio che c'è soluzione unica, ma va dimostrato facendo i conti.

Al solito modo si conclude che l'unica sol. es. $u(x)$ è l'unica p.to di min (parlo!)

Esempio 3 min $\{F(u) : u \in C^1([0,1])\}$

L'idea è che on the road nascono due NBC

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_0^1 [-\ddot{u} + (u-x)]v \, dx = 0$$

Fase 1: uso v nulle al bordo e ottengo ELE $\ddot{u} = u - x$

Fase 2: ho che

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$$

Ora basta scegliere $v \in V$ t.c. $v(1) = 1$ e $v(0) = 0$
 $v(1) = 0$ e $v(0) = 34$

Conclusione come sempre

Esempio 4 $\min \{ F(u) : \underbrace{u(0) = u(1)}_{\text{è sp. vett.}} \}$

Come prima arrivo a

$$v(0) \{ \dot{u}(1) - \dot{u}(0) \} + \int_0^1 \text{solito} = 0$$

↑
ho raccolto perché $v(0) = v(1)$

Alla fine ottengo

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{all'inizio} \\ \text{on the road} \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \ddot{u} = u - x \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases}} \right\} \begin{matrix} \text{PBC} \\ \uparrow \\ \text{periodic} \end{matrix}$$

Esempio 5 $\min \{ F(u) : \underbrace{\int_0^1 u(x) dx = 7}_{\text{X}}$

X è sp. aff. con $V = \{ v \in C^1([0,1]) : \int_0^1 v(x) dx = 0 \}$

Con i conti soliti arrivo a

$$\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0) + \int_0^1 [-\ddot{u} + (u-x)]v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

- Fase 1 Dimittendomi alle $C_c^\infty((0,1))$ a media nulla ottengo $-\ddot{u} + (u-x) = \lambda$
 ↑ avrebbe bene anche C^1 nulle al bordo
 ↑ costante che viene dal DBR

- Fase 2 : ottengo le NBC

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x + \lambda \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = 1 \\ \int_0^1 u(x) dx = 7 \end{cases} \quad \rightsquigarrow u(x) = ae^x + be^{-x} + x - \lambda$$

e spero con le 3 condizioni di trovare univocamente a, b, λ .
 [Provare per esercizio].

Esempio 6 $F(u) = \int_0^1 (\ddot{u}^2 + (u-x)^2) dx = 0$

$$\min \{ F(u) : u(0) = 7 \}$$

... Soliti convenevoli ...

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^1 (\ddot{u} + t\ddot{v})^2 + (u+tv-x)^2 dx = 0$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = 2 \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} + 2 \int_0^1 (u-x)v dx$$

Provo a integrare per parti (tolgo i 2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} &= [\ddot{u} \dot{v}]_0^1 - \int_0^1 \ddot{u} \dot{v} dx \\ &= [\ddot{u} \dot{v}]_0^1 - [\ddot{u} v]_0^1 + \int_0^1 u^{(4)} v dx \end{aligned}$$

In conclusione la 2^a forma int. di Eulero è

$$\delta F(u, v) = \int_0^1 [u^{(4)} + (u-x)] v dx + \ddot{u}(1) \dot{v}(1) - \ddot{u}(0) \dot{v}(0) + \ddot{u}(0) v(0) - \ddot{u}(1) v(1)$$

per def. di V

- Fase 1 Usando C_2^∞ ottengo $u^{(4)} = -u+x$ ELE
Mi aspetto 4 BC
- Fase 2 Scegliendo bene le v ottengo il pbm

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(4)} = -u+x \\ u(0) = 2 \\ \ddot{u}(0) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{DBC dall'inizio} \\ \text{Nate su due} \\ \text{road} \end{array} \right\}$$

→ Ordine eq = 2. ordine
derivate nel funzionale
→ 2 BC per estremo

Ist. Analisi Matematica —

LEZIONE 05

Note Title

01/10/2019

Tutte le forme di ELE

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

$$L: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad L(x, s, p)$$

Obiettivo: calcolare la variazione prima.

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_a^b L(x, u(x)+tv(x), \dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) dx$$

A dx abbiamo un integrale dipend. da parametro. Sotto opportune ipotesi (vedi Analisi 2) abbiamo che

$$\varphi'(t) = \int_a^b \{ L_s(x, u(x)+tv(x), \dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) v(x) + L_p(x, u(x)+tv(x), \dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) \dot{v}(x) \} dx$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

1ª forma integrale di Eulero

Teorema Supponiamo che

- L sia C^1 nelle 3 variabili (ma basta un po' meno)
- u e v siano C^1 in x (indip. dai dati al bordo)

Allora $\delta F(u, v)$ esiste e si scrive come sopraDim. Osservare che posso derivare l'integrale parametrico.

— o — o —

Integrando per parti il termine con $\dot{v}$ otteniamo

$$\int_a^b L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} dx = [L_p(x, u, \dot{u}) v]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b [L_p(x, u, \dot{u})]' v dx$$

e quindi

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]' \} v + [L_p(x, u, \dot{u}) v]_{x=a}^{x=b}$$

2^a forma
integrale di
Eulero

Teorema Supponiamo che

- L sia C^2 nelle 3 variabili, (ma basta meno)
- u sia C^2 in $[a, b]$,
- v sia C^1 in $[a, b]$.

Allora $\delta F(u, v)$ si scrive come sopra.

Dim. Oss. che posso integrare per parti.

Ponenterò sui p.ti di min.

Sia X sp. aff. con V vett. di riferimento. Sia $u_0 \in X$ e sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Dico che u_0 è DLM (directional local minimum) per F se per ogni $v \in V$ la funzione

$$F(u_0 + tv)$$

ha un min. loc. per $t=0$.

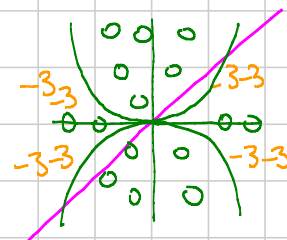
Più in generale, se $W \subseteq V$ è un s.sp. vettoriale, posso dire cosa vuol dire che u_0 è DLM rispetto alle direzioni W .

Prop. Nelle ipotesi di sopra, se u_0 è DLM risp. alle dir. W , allora

$$\delta F(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in W$$

purché esista (o non esista, o si annulla).

Oss. I soliti esempi di Analisi 2 dicono che DLM $\nRightarrow$ min loc



— o — o —

Torniamo al funzionale di sopra, e supponiamo che u_0 sia DLM rispetto ad una classe W di funzioni nulle al bordo e tali da immettere il FLCV, ad esempio

$$W = C_c^\infty(a, b)$$

$$W = C^1([a, b]) \text{ nulle in } a \text{ e } b$$

Allora nelle ipotesi del 2° teorema deve accadere che

$$[L_p(x, u_0, u_0)]' = L_s(x, u_0, u_0)$$

ELE (in forma diff.)

Il LHS espanso diventa

$$L_{px}(x, u_0, u_0) + L_{ps}(x, u_0, u_0) u_0' + L_{pp}(x, u_0, u_0) u_0''$$

Se in aggiunta, oltre alle v precedenti, posso permettermi anche delle v che si annullano in un estremo, ma non nell'altro allora nascono delle NBC del tipo

$$L_p(x, u_0, u_0) = 0$$

per $x = a$ oppure $x = b$

— o — o —

ELE in forma DBR Ripartiamo dalla 1^a forma integrale

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

Integriamo per parti il 1° termine. Poniamo

$$\Lambda(x) := \int_a^x L_s(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

Allora

$$\int_a^b L_s(x, u, \dot{u}) v dx = [\Lambda(x) v(x)]_a^b - \int_a^b \Lambda(x) \dot{v}(x) dx$$

Supponiamo che u_0 sia DLM rispetto a $C_c^\infty(a, b)$ (ma si può generalizzare a classi più piccole). Allora

$$0 = \delta F(u_0, v) = \int_a^b \{ -\Lambda(x) + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \} \dot{v} dx \quad \forall v \in \dots$$

Usando il Lemma DBR ottergo che

$$L_p(x, u_0, \dot{u}_0) = c + \Lambda(x)$$

$$= c + \int_a^x L_s(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) dt$$

Si usa solo
L e u_0
di classe C^1

Oss. → Eq. diff. e integrale di ordine 1, però anche c è un parametro libero

→ Si può ottenere banalmente integrando la ELE precedente, ma per farlo servirebbero più ipotesi su L e u_0 .

— o — o —

ELE in forma ERDMANN

Supponiamo L non dipenda dalla variabile x (caso autonomo)
Allora ELE classica diventa

$$[L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u})$$

Moltiplico a dx e sx per $\ddot{u}$:

$$\begin{aligned} \ddot{u} [L_p(u, \dot{u})]' &= \ddot{u} L_s(u, \dot{u}) \\ \text{"} & \\ [\ddot{u} L_p(u, \dot{u})]' &- \ddot{u} L_p(u, \dot{u}) \end{aligned}$$

Riorganizzando viene

$$[\ddot{u} L_p(u, \dot{u})]' = \ddot{u} L_p(u, \dot{u}) + \ddot{u} L_s(u, \dot{u}) = [L(u, \dot{u})]'$$

↑ qui uso L autonoma

ma allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\ddot{u} L_p(u, \dot{u}) = c + L(u, \dot{u})$$

Oss. Questa è eq. diff. di ordine 1, con un parametro c libero.

Question

Si potrà ricavare usando unicamente ipotesi C^1 su L e u .

Achtung! Se u risolve ELE classica, allora u risolve ELE Erdmann.

Non vale il viceversa (tutte le u costanti risolvono ELE Erdmann).

ELE con dipendenza da derivate successive

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots) dx \quad L(x, s, p_1, p_2, \dots)$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \left\{ L_s(x, u, \dots) v + \sum_{i=1}^n L_{p_i}(x, u, \dots) v^{(i)} \right\} dx$$

Quando integro per parti, se NON ho termini di bordo...

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \left\{ L_s(x, u, \dots) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} L_{p_i}(x, u, \dots) \right\} v$$

Da qui se le derivate sono abbastanza possiamo ottenere ELE in forma diff.

— o — o —

Esempio per ordine 2

$$[L_{p_1}(x, u, \dot{u}, \ddot{u})]' - [L_{p_2}(x, u, \dot{u}, \ddot{u})]'' = L_s(x, u, \dot{u}, \ddot{u})$$

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 06

Note Title

01/10/2019

COND. SUFFICIENTI DI MINIMALITÀ

→ via convessità

→ via funzionale ausiliario

Via convessità Consideriamo $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e il funzionale

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}) dx$$

Consideriamo il pbm. di minimo

$$\min \{ F(u) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

In questo caso ELE diventa $(L_p)' = L_s$

$$[\psi'(\dot{u})]' = 0 \quad \psi''(\dot{u}) \ddot{u} = 0$$

se ho abbastanza regolarità, ad esempio $\psi \in C^2$ e $u \in C^2$.
Tutte le rette risolvono, e c'è un'unica che rispetta DBC.
Sia $u_0(x)$ questa retta.

Domanda: è p.to di minimo?

Risposta:

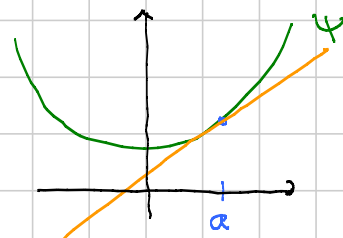
→ se ψ è convessa, allora u_0 è p.to di min.→ se ψ è strett. convessa, allora è pure l'unico.↓ è meno che chiedere $\psi'' > 0$

Lemma Se $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + b \psi'(a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Se è strett. convessa, allora vale $>$ tutte le volte che $b \neq 0$.

[Geometricamente: ψ sta sopra le rette tangenti]



Dim (minimalità, usando il lemma)

Sia u_0 la retta, e sia $u(x)$ un altro competitor. Allora

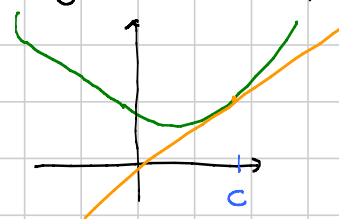
$$u(x) = u_0(x) + v(x)$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^b \psi(\underbrace{u_0(x)}_a + \underbrace{v(x)}_b) dx \geq \int_a^b \psi(u_0(x)) dx \\ &\quad + \int_a^b \psi'(u_0(x)) v(x) dx \\ &= F(u_0) + \int_a^b \underbrace{\psi'(c)}_{\substack{\uparrow \\ u_0 \equiv c}} v(x) dx \\ &= \psi'(c) [v(x)]_a^b = 0 \end{aligned}$$

Così ho dimostrato che $F(u) \geq F(u_0)$.

Se ψ è strett. convessa e $v \not\equiv 0$, allora esiste un pto, e quindi per continuità tutto un intervallo, in cui $v(x) \neq 0$. Ma allora in quell'int. vale la disug. stretta tra le integrande, e quindi tra gli integrali.

Oss. Affinché il p.to di min. sia davvero non unico, deve accadere che il coeff. ang. di $u_0(x)$ ricade all'interno di un tratto rettilineo del grafico di ψ , altrimenti è comunque unico.



Oss. La dim. + semplice del lemma usa Taylor-Lagrange

$$\psi(a+b) = \psi(a) + b\psi'(a) + \underbrace{\frac{1}{2}b^2\psi''(\xi)}_{\geq 0}$$

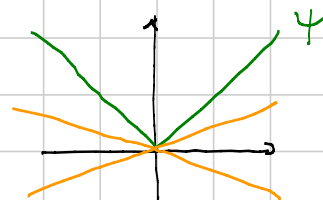
In realtà si dimostra anche (vedi Analisi 1) usando solo $\psi \in C^1$.

Volendo essere minimalisti, basta ψ convessa e basta, per scrivere il lemma nella forma

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + mb$$

$$\text{dove } m \in [\psi'_-(a), \psi'_+(a)]$$

derivate dx e sx in a, che
per ψ convessa esistono sempre!



Prendiamo Lagrangiana generale $L(x, s, p)$.

Mettiamo di avere regolarità C^2 .

Sia $u_0(x)$ una soluzione di ELE. È p.to di minimo?

Risposta: Sì, se per ogni $x \in [a, b]$ la funzione

$$(s, p) \rightarrow L(x, s, p)$$

è convessa in (s, p) . (nella coppia)

Dim. Si parte dalla disug.

$$L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) \geq L(x, s_0, p_0) + s_1 L_s(x, s_0, p_0) + p_1 L_p(x, s_0, p_0)$$

} stare sopra il piano tangente

$$\begin{aligned} F(u_0 + v_0) &= \int_a^b L(x, u_0 + v_0, u'_0 + v'_0) dx \\ &\geq \int_a^b L(x, u_0, u'_0) dx \quad \leadsto F(u_0) \\ &\quad + \underbrace{\int_a^b \{v_0 L_s(x, u_0, u'_0) + v'_0 L_p(x, u_0, u'_0)\} dx}_{=0 \text{ se } u_0 \text{ verifica 1}^a \text{ forma integrale di Eulero}} \end{aligned}$$

Oss. Valgono opportune varianti con stretta convessità

Teorema (Minimalità via funzionale ausiliario)

Sia S un insieme, siano $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: S \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni, e sia $x_0 \in S$.

Supponiamo che

- (i) $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in S$ (F sopra G)
- (ii) $G(x) \geq G(x_0)$ " " " (x_0 p.to di min. per G)
- (iii) $F(x_0) = G(x_0)$

Allora x_0 è p.to di min per F

Dim. Per ogni $x \in S$ vale

$$F(x) \underset{(i)}{\geq} G(x) \underset{(ii)}{\geq} G(x_0) \underset{(iii)}{=} F(x_0).$$

Esempio 1 (Doppio pozzo)

$$\psi(p) = (p^2 - 1)^2$$

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 - 1)^2 dx$$

$$\min \{ F(u) : u(0)=1, u(1)=2 \}$$

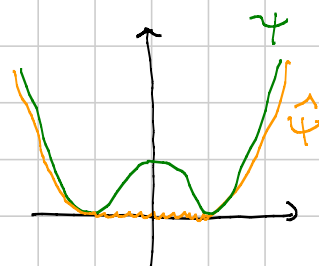


La retta $u_0(x) = x+1$ risolve ELE e rispetta DBC.
 È p.to di min. ? Sì, anche se ψ non è convessa

Considero $\hat{\psi}$ ottenuta "convessificando"

Ora $\hat{\psi}$ è convessa. Pongo

$$G(u) := \int_0^1 \hat{\psi}(\dot{u}) dx$$



e applico il lemma. Le ipotesi sono verificate

(i) perché $\psi \geq \hat{\psi}$ ovunque

(ii) perché $\hat{\psi}$ è convessa

(iii) " $\hat{\psi}(1) = \psi(1)$.

— o — o —

Oss. Si poteva fare una dim. alternativa riciclando la dim del caso convesso dopo aver osservato che ψ sta sopra la retta tangente in $p=1$

— o — o —

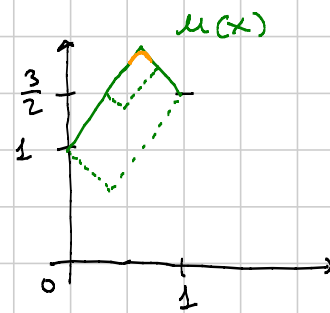
Esempio 2 $\min \{ F(u) : u(0)=1, u(1)=\frac{3}{2} \}$

Ora la retta è $1 + \frac{x}{2}$, quindi coeff. ang. = $\frac{1}{2}$

In questo il minimo non esiste, e l'inf. è 0.

"Basta" prendere una u che abbia come derivata solo ± 1

Usando che l'inf nelle C^1 o nelle C^k a tratti è lo stesso, segue che l'inf. è 0.



"Un piccolo raccordo" costa poco in termini di energia.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 07

Note Title

03/10/2019

Funzionali integrali con integrali multipliSetting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto (decente)

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

↑ integrale in $\mathbb{R}^d$

$$L: \underbrace{\Omega}_x \times \underbrace{\mathbb{R}}_s \times \underbrace{\mathbb{R}^d}_p \rightarrow \mathbb{R} \quad u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Esempio classico: funzionale di DIRICHLET

$$F(u) := \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

↑ norma Euclidea

Integrazione per parti in $\mathbb{R}^d$ AKA Teorema della divergenza
AKA Gauss - Green

(vedi les. Analisi 2)

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx$$

prodotto scalare

↑ versione normale
esterna a $\partial\Omega$ ↑ integrale in
dim. $d-1$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\vec{E}(x) = (E_1(x), \dots, E_d(x)) \quad \operatorname{div} \vec{E} := \sum_{i=1}^d \frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i}$$

Variazione prima del Dirichlet

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= F(u+tv) = \int_{\Omega} |\nabla(u+tv)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2\end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx$$

1ª formula integrale

Applico Gauss - Green (se posso)

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) v dx + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\langle \vec{E}, \nabla f \rangle$ $\operatorname{div} \vec{E}$ f $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle$

$$= - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Laplaciano derivata direzionale
 in direzione di $\vec{n}$

$$\Delta u := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

$$\delta F(u, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u v dx + 2 \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$$

2ª formula
cont.

Se supponiamo che u sia DLM rispetto ad ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (o qualunque altra classe di v nulle al bordo che rimeschi il FLCV) allora u risolve

$$\Delta u = 0$$

ELE in forma diff.

— o — o —

Caso della Lagrangiana generale

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} L(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) dx$$

Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale (me v di classe C^1 , L di classe C^1 , Ω limitato), allora

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{\Omega} L_s(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) v dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d L_{p_i}(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

Ponendo $t=0$ otteniamo

$$\delta F(u, v) = \int_{\Omega} \{ L_s(x, u, \nabla u) v + \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), \nabla v \rangle \} dx$$

$\uparrow$ gradiente di L
rispetto alle variabili p

Se integriamo per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) &= \int_{\Omega} \{ L_s(x, u, \nabla u) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) \} v dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), \vec{n} \rangle d\sigma \end{aligned}$$

Se u è DLM rispetto ad una classe suff. ampia di v , allora

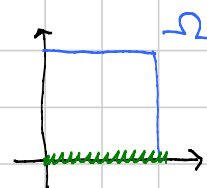
$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s(x, u, \nabla u)$$

ELE differenziale

— o — o —

BC on the road $\Omega = (0,1)^2 = \text{quadrato in } \mathbb{R}^2$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1(\bar{\Omega}), \underbrace{u(x,0) = x}_{\substack{\text{Dirichlet} \\ \text{DBC su un lato}}} \}$$



I competitori sono uno sp. affine $\times$ con sp. vet. di rif.

$$V = \{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \}$$

Supponiamo che u sia p.to di min. abbastanza regolare.
Allora

$$0 = \delta F(u,v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx + 2 \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds$$

↑ integrale curvilineo

• 1ª fase: uso sdo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e da FLCV ottengo

$$\boxed{\Delta u = 0} \quad \text{ELE}$$

• 2ª fase: ora so che $\int_{\Omega} = 0$ perché $\Delta u = 0$. Quindi

$$\int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \, ds = 0 \quad \forall v \in V$$

Facendo FLCV sugli altri 3 lati ottengo $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0$
per ogni x e altri 3 lati.

Conclusione: u deve risolvere

$$\Delta u = 0 \quad \text{ELE}$$

$$u(x,0) = x \quad \text{DBC dall'inizio}$$

$$\begin{aligned} u_x(0,y) &= u_x(1,y) = 0 \quad \forall y \in [0,1] \\ u_y(x,1) &= 0 \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

NBC on the ROAD

Supponendo di saper risolvere il pbm. ELE+DBE+NBC, o supponendo di sapere che $u_0(x,y)$ è soluzione, allora dico che $u_0(x)$ è pto di min globale (unico!)

$$\begin{aligned}
 F(u) &= F(u_0 + v) = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = F(u_0) \\
 &\quad + 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle dx = 0 \quad \delta F(u_0, v) \\
 &\quad + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq 0
 \end{aligned}$$

Vale $\mathcal{L}' = 0$ se e solo se $\nabla v \equiv 0$, cioè $\Leftrightarrow v = \text{costante}$,
 ma grazie al lato sud di Ω $v \equiv 0$.

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 08

Note Title

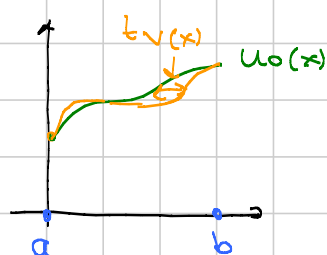
03/10/2019

Variatione interna (variazione orizzontale)Variatione esterna o verticale

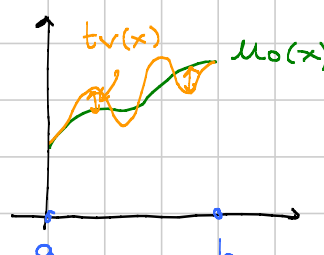
$$u(x) + t v(x)$$

aggiungo / tolgo
in verticaleInterna o orizzontale : $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $v \in C_c^\infty((a, b))$

$$u(x + t v(x))$$

per $|t|$ suff. piccolo, l'argomento $\in [a, b]$
per ogni $x \in [a, b]$ (esercizio)(qui è essenziale che $v \equiv 0$ in un intorno
dei 2 estremi)

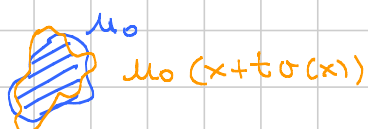
ORIZZ.



VERT.

Quando diventa essenziale la variazione interna?

- ① Quando sto considerando $u : [a, b] \rightarrow S^1$ o altra varietà (non posso aggiungere)
- ② Quando l'insieme $\mathbb{X}$ non sono funzioni, ma ad esempio sottoinsiemi del piano visti come funzioni caratteristiche



Esercizio Calcolare $\delta F(u, v)$ dove v agisce all'interno

$$\varphi(t) = \int_a^b L(x, u(x+tv(x)), \dot{u}(x+tv(x))(1+t\ddot{v}(x))) dx$$

dove ho usato che

$$\frac{d}{dx} u(x+tv(x)) = \dot{u}(x+tv(x))(1+t\ddot{v}(x))$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = & \int_a^b L_s(\dots) \dot{u}(x+tv(x)) v(x) + \\ & + \int_a^b L_p(\dots) \{ \ddot{u}(x+tv(x)) v(x)(1+t\ddot{v}(x)) + \\ & \dot{u}(x+tv(x)) \ddot{v}(x) \} \end{aligned}$$

Ponendo $t=0$ diventa

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = \delta_i F(u, v) = & \int_a^b L_s(x, u(x), \dot{u}(x)) \dot{u}(x) v(x) dx \\ & + \int_a^b L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) \underbrace{\{ \ddot{u}(x) v(x) + \dot{u}(x) \ddot{v}(x) \}}_{[\dot{u}(x) v(x)]'} \end{aligned}$$

Se posso integrare per parti ottengo

$$\delta_i F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]' \} \dot{u} v dx + \text{bordo}$$

Applicando se posso FLCV

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' \dot{u} = L_s(x, u, \dot{u}) \dot{u} \quad = \text{vecchia ELE} \\ \text{mult. per } \dot{u}$$

Oss. Mi dovevo aspettare che tutte le $u(x)$ costanti annullano $\varphi'(0)$ perché non è interessante fare variazioni orizz. di costanti 😊

ARGOMENTO DI TRONCAMENTO

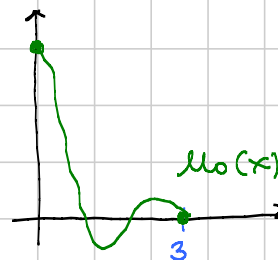
$$\min \left\{ \int_0^3 (\dot{u}^2 + u^2) dx : u \in C^1([0,3]), u(0)=5, u(3)=0 \right\}$$

$$(L_p)' = L_s$$

$$(2\ddot{u})' = 2u \leadsto \ddot{u} = u + BC$$

risolvere è fatta.

Domanda: $u_0(x)$, il p.to di min., ha minimo prima di $x=3$ o in $x=3$?



Dico che $u_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,3]$

Brutal mode: ha senso per $u_0(x)$ andare sotto 0?

No! Una volta arrivato a 0, mi conviene tirare dritto e risparmiare sia di funzione sia di derivata.

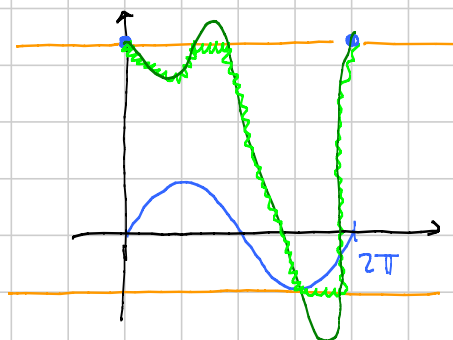
$$\text{Esempio 2} \quad \min \left\{ \int_0^{2\pi} [\dot{u}^2 + (u - \sin x)^2] dx, u(0)=5 = u(2\pi) \right\}$$

Voglio assomigliare a $\sin x$ pagando poco di derivata

$$\ddot{u} = u - \sin x$$

+BC

$\leadsto$ risolve facile



Dico che $-1 \leq u_0(x) \leq 5$ per ogni $x \in [0, 2\pi]$

Moralmente: non conviene andare sopra/sotto, meglio troncare

Achtung! Se anche $u_0 \in C_c^\infty((0, 2\pi))$, non è detto che

$u_1(x) := \min\{u_0(x), 5\}$ sia C^1 a tratti (numero finito di tratti)

[esempio per esercizio]

Rigoroso 1 Sia $x_0 \in (0, 2\pi)$ t.c. $u(x_0) > 5$



Pongo $x_1 := \sup\{x \in [0, x_0] : u_0(x) \leq 5\}$

$x_2 := \inf\{x \in [x_0, 2\pi] : u_0(x) \leq 5\}$

A questo p.to sono sicuro che

$$u_0(x) \geq 5 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

e faccio il troncamento

$$\hat{u}_0(x) = \begin{cases} 5 & x \in [x_1, x_2] \\ u_0(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e verifico che risparmio.

Rigoroso 2 Sia x_0 un p.to di max di $u_0(x)$.

Se u_0 supera 5, allora di sicuro $x_0 \in (0, 2\pi)$ (interno), quindi

$$u''_0(x_0) \leq 0$$

Però da ELE segue che

$$u''_0(x_0) = u_0(x_0) - \sin x_0 \geq 5 - 1 = 4$$

Allo stesso modo dimostro che $u_0(x)$ non può scendere sotto -1

↪ prendo x_0 p.to di min.

$$0 \leq \hat{u}''_0(x_0) = u_0(x_0) - \sin x_0 < 0$$

$\uparrow$ p.to min $\uparrow$ se è < -1

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 09

Titolo nota

07/10/2019

V spazio vettoriale + struttura

 $\mathbb{R}^d$

sp. di Hilbert (funziona tutte, tranne alcune eccezioni)

sp. di Banach (" niente, ")

sp. normati

sp. vett. localmente convessi (fin qui come nei Banach)

sp. vett. topologici

Def. (Prod. scalare) È una funzione $p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, di solito indicata con $p(x, y) = \langle x, y \rangle$, con le 3 proprietà

$$(PS1) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall \dots$$

$$(PS2) \quad \langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a \langle x_1, y \rangle + b \langle x_2, y \rangle \quad \forall \dots$$

$$(PS3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ e vale } = 0 \text{ se e solo se } x = 0.$$

(Simmetria, bi-linearità, definito positivo)

Def. (Norma) È una funzione $n: V \rightarrow \mathbb{R}$, di solito $n(x) = \|x\|$, con le 4 proprietà

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \text{ se e solo se } x = 0$$

$$(N3) \quad \|ax\| = |a| \cdot \|x\| \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in V$$

$$(N4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x \in V, \forall y \in V$$

Oss. Dato un pr. scalare su V, allora

- abbiamo una norma $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ (verificare)
- abbiamo una distanza $\text{dist}(x, y) := \|x - y\|$
- abbiamo una topologia
- abbiamo una nozione di convergenza

$$x_n \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{vettori}}} x_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{def} \quad \text{dist}(x_n, x_\infty) = \|x_n - x_\infty\| \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{numeri}}} 0$$

Def. Uno sp. di Hilbert è un sp. vett. H su cui è definito un prod. scalare che induce una norma, che induce una distanza che lo rende uno sp. metrico **COMPLETO**

Prop. Sia V uno sp. vett. con prod. scalare. Allora norma e prod. scalare sono continui, cioè

$$\bullet x_n \rightarrow x_\infty \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\|$$

$$\bullet x_n \rightarrow x_\infty \text{ e } y_n \rightarrow y_\infty \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_\infty, y_\infty \rangle$$

Anche le op. di sp. vett. sono continue

Dim. (Norma) Vale che

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \quad (\text{segue dalla triangolare})$$

da cui

$$0 \leq | \|x_n\| - \|x_\infty\| | \leq \|x_n - x_\infty\|$$

(Prod. scalare)

$$| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_\infty, y_\infty \rangle | \leq | \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_\infty \rangle | + | \langle x_n, y_\infty \rangle - \langle x_\infty, y_\infty \rangle |$$

$$(\text{ racc. + c.s. }) \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y_\infty\| + \|y_\infty\| \cdot \|x_n - x_\infty\|$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $\|x_\infty\| \cdot 0 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0$

(Op. di sp. vett.) $\leadsto$ esercizio

Oss. Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora x_n è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|x_n\| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (vale in uno sp. normato e opportunamente modificato in uno sp. metrico).

— 0 — 0 —

Basi ortonormali (sinonimi: basi Hilbertiane, sistemi ortonormali completi).

Def. Sia H uno sp. di Hilbert. Una base ortonormale è una successione $\{e_n\} \subseteq H$ (con $n \in \mathbb{N}$) tale che
(1) è ortonormale cioè

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

(2) genera H nel senso che $\text{span}(\{e_n\})$ è DENS0 in H .

Achtung! Non è una base algebrica in generale, perché servirebbe $\text{span}(\{e_n\}) = H$.

Ora si chiede solo che ogni el. di H si possa approssimare con comb. lin. finite di $\{e_n\}$.

Def. (Componenti di un vettore) Sia H sp. di Hilbert con base $\{e_n\}$.

Allora per ogni $v \in H$ posso definire le sue componenti

$$v_n := \langle v, e_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In questo modo ad ogni vettore si associa una succ. di numeri.

— 0 — 0 —

Teorema 1 (Esistenza della base)

Sia H uno sp. di Hilbert. Supponiamo che

(i) H è **separabile** (cioè esiste un sottospazio denso e NUMERABILE)

(ii) $\dim H = +\infty$ (dimensione algebrica)

Allora esiste una base ortonormale.

Teorema 2 (Proprietà delle componenti)

Sia $\{e_n\}$ una base ortonormale in uno sp. di Hilbert H .

Allora

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n \quad [\text{Aggiunta dopo video}]$$

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle v, e_n \rangle^2}_{\text{componenti}} \quad (\text{Pitagora in dim. infinita})$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle \cdot \langle w, e_n \rangle$$

Oss. Il teo. 2 dice in particolare che la serie al RHS converge.

Morale: il teorema 2 permette di identificare gli elementi di H con successioni di numeri "quadrato sommabili". A quel pto lavoro solo con le successioni

In dim finita, gli spazi vett. "sono" $\mathbb{R}^n$
 Gli spazi di Hilbert separabili di dim. infinita
 "sono" $\mathbb{R}^\infty$

— o — o —

Lemma 1 (Caratterizz. serie Hilbertiane convergenti)

Sia $\{e_n\}$ base ortonorm. in Hilbert H . Sia $\{a_n\}$ succ. di numeri.

Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n}_{\text{serie di vettori}} \text{ converge} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2}_{\text{serie di numeri}} \text{ converge}$$

Lemma 2 (Propri. delle serie Hilbertiane)

Siano $\{e_n\}$ ed H come sopra. Sia $\{a_n\}$ succ. di numeri l.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

e sia

$$v := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \quad (\text{ben definito per Lemma 1})$$

Allora

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$\langle v, e_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lemma 3 (Caratterizz. vettore nullo)

Siano $\{e_n\}$ ed H come sopra.

Sia $v \in H$ tale che

$$\langle v, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora $v = 0$.

Dim. Lemma 1 Stano $m \geq n$ numeri interi. Allora

$$\|a_n e_n + \dots + a_m e_m\|^2 = a_n^2 + \dots + a_m^2$$

↑
ges. 1 + ortogonalità di $\{e_n\}$

Pongo $\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m a_k e_k$ e $S_m := \sum_{k=0}^m a_k^2$

Sopra abbiamo scritto

$$\|\hat{S}_m - \hat{S}_{m-1}\|^2 = |S_m - S_{m-1}|$$

da cui $\{\hat{S}_m\}$ è di Cauchy in $H \Leftrightarrow \{S_m\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.
Finale classico

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \text{ conv. in } H &\Leftrightarrow \{\hat{S}_m\} \text{ è di Cauchy in } H \\ &\Leftrightarrow \{S_m\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ conv. in } \mathbb{R}. \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned}$$

Dim. Lemma 2 Chiamo $v_m = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$ e
osservo che $v_m \rightarrow v$ e

$$\|v_m\|^2 = a_0^2 + \dots + a_m^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\langle v_m, e_k \rangle = a_k \quad \forall m \geq k$$

Passo al limite e uso la continuità di norma e prod. sc.

Dim. Lemma 3 Per la prima volta uso che lo span è denso.
Prendo v e prendo $\varepsilon > 0$. Per la densità trovo $v_\varepsilon \in \text{Span}$
tale che $\|v - v_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon$.

Ma allora

perché v_ε è comb. lin. finita di e_n

$$\varepsilon \geq \|v - v_\varepsilon\|^2 = \|v\|^2 + \|v_\varepsilon\|^2 - 2 \overset{0}{\langle v, v_\varepsilon \rangle} \geq \|v\|^2.$$

$$\leadsto \|v\| = 0 \leadsto v = 0 \quad \text{(uso proprietà PS3).}$$

--- 0 --- 0 ---

Ist. Analisi Matematica – LEZIONE 10

Note Title

07/10/2019

Dim. teo. 2 Sia dato $v \in H$. Voglio dim. che

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k$$

Il resto, cioè formule per norma e prod. scalare sono corollari.

Chiamo $\hat{v}$ il RHS della formula di sopra. Devo dimostrare

- che la serie conv.
- che $\hat{v} = v$.

[Aggiunto dopo video]

La conv. della serie è equiv. a $\sum_{k=0}^{\infty} \langle v, e_k \rangle^2 < +\infty$, la quale a sua volta è equiv. a una equilimitazione delle somme parziali. Fissato n , scrivo

$$v = \underbrace{\langle v, e_0 \rangle e_0 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n}_{S_n} + r_n \quad \uparrow \text{resto}$$

Da questa segue che

$$\|v\|^2 = \|S_n\|^2 + \|r_n\|^2 + 2 \underbrace{\langle S_n, r_n \rangle}_0 \geq \|S_n\|^2$$

(geom. 1) $\nearrow = \sum_{k=0}^n \langle v, e_k \rangle^2$

Per dimostrare che $\langle S_n, r_n \rangle = 0$ osservo che $\langle r_n, e_k \rangle = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ in quanto basta moltip. scalarmente per e_k a dx e sx:

$$\langle v, e_k \rangle = \langle S_n, e_k \rangle + \langle r_n, e_k \rangle$$

" $\langle v, e_k \rangle$

Una volta che $\hat{v}$ è ben definito sappiamo dal Lemma 2 che

$$\langle \hat{v}, e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè

$$\langle \hat{v} - v, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ma allora dal Lemma 3 concludiamo che $v = \hat{v}$.

Dim. Teo 1 Sia $D \subseteq H$ denso e numerabile

Step 1 Esiste un sottoinsieme $D' \subseteq D$ linearmente indipendente e con lo stesso Span: $\text{Span}(D') = \text{Span}(D)$

Algoritmo: $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$

Costruisco D' così: d_1 lo piglio se è $\neq 0$

d_2 lo piglio se $\notin \text{Span}\{d_1\}$

d_3 lo piglio se $\notin \text{Span}\{d_1, d_2\}$

Step 2 Applico Gram-Schmidt a D' in modo da ottenere un sistema ortonormale.

Def. (Convergenza debole) Sia H uno sp. di Hilbert.

Dico che u_m converge debolmente a u_∞ e scrivo

$$u_m \rightarrow u_\infty$$

se

$$\langle u_m, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Fatti semplici

① Il limite debole, se esiste, è unico

Dim. Supp. $u_m \rightarrow u_\infty$ e $u_m \rightarrow \hat{u}_\infty$. Allora

$$\langle u_\infty - \hat{u}_\infty, v \rangle = \underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle u_m, v \rangle}_{\langle u_\infty, v \rangle} - \underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle u_m, v \rangle}_{\langle \hat{u}_\infty, v \rangle} = 0$$

Concluso per caratt. vettore nullo poiché v è arbitrario.

② Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$

Dim. $\langle u_{m_k}, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle \quad \forall v \in V$

③ Se $u_m \rightarrow u_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$, allora

$$a u_m + b w_m \rightarrow a u_\infty + b w_\infty$$

Dim. Linearità del prod. scalare

④ Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $u_m \rightarrow u_\infty$.

Dim. Continuità del prod. scalare

⑤ Se $\dim H < +\infty$, allora

$$u_m \rightarrow u_\infty \iff u_m \rightarrow u_\infty$$

Dim. In dim. finita la conv. di vettori è equivalente alla conv. delle componenti, la quale è implicata dalla conv. dei prod. scalari.

⑥ Se $\dim H = +\infty$, allora esistono succ. che convergono debolmente, ma non fortemente.

Dim. Prendo un qualunque sistema ortonormale $\{e_n\}$ (non serve lo span denso, e quindi esiste facilmente sempre). Dico che

$$e_n \rightarrow 0 \quad \text{ma} \quad e_n \not\rightarrow 0$$

• $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ se $n \neq m$, quindi $\{e_n\}$ non ha nemmeno s.succ. di Cauchy, quindi di sicuro non converge forte.

• Dimostro $e_n \rightarrow 0$ nel caso in cui è base ortonorm. Fissato $v \in H$, devo dim. che $\langle v, e_n \rangle \rightarrow 0$, ma so che

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle^2$$

e il termine generale di una serie convergente $\rightarrow 0$.
(se $\text{Span}(\{e_n\})$ non è denso in H , vale comunque il $\geq \dots$)

Domanda: quanto posso ruolebolire la richiesta nella def.?

$$\langle v_m, v \rangle \rightarrow \langle v_\infty, v \rangle \quad \forall v \in W \subseteq H$$

Quanto può essere piccolo W ?

Prop. Sia H uno sp. di Hilbert, sia $\{v_m\}$ una succ. e sia $v_\infty \in H$, e sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme

Supponiamo che

$$(i) \quad \langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W$$

(ii) $\text{Span}(W)$ è denso in H

(iii) $\{v_m\}$ è limitata. $\leftarrow$ SERVE !!!

Allora $v_m \rightarrow v_\infty$.

Dim. Sia $M \in \mathbb{R}$ tale che $\|u_m\| \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Brutal mode

$$|\langle u_m, u \rangle - \langle u_\infty, u \rangle| \leq |\langle u_m, u \rangle - \langle u_m, u_\varepsilon \rangle| \quad (1)$$

$$+ |\langle u_m, u_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, u \rangle| \quad (3)$$

Dato $u \in H$, scelgo $u_\varepsilon \in \text{Span } W$ abbastanza vicino.

A quel pto (1) e (3) sono piccoli per vicinanza, mentre (2) è piccolo per ipotesi.

Rigoroso:

→ mi vengono dati $u \in H$ ed $\varepsilon > 0$

→ scelgo u_ε tale che

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{4M+1}$$

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{4\|u_\infty\|+1}$$

→ visto u_ε , scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\langle u_m, u_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

Ora per $m \geq m_0$ avremo che

$$(1) = |\langle u_m, u \rangle - \langle u_m, u_\varepsilon \rangle| \leq \underbrace{\|u_m\|}_{\leq M} \cdot \|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$(3) = | \dots | \leq \|u_\infty\| \cdot \|u - u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$(2) \leq \frac{1}{4} \varepsilon \text{ per definizione.}$$

Ho usato in (2) che se $\langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in W$, allora lo fa anche per ogni $w \in \text{Span}(W)$
 comb. lin. $\uparrow$ FINITE

— o — o —

Teorema Sia H sp. di Hilbert separabile, e sia $\{e_n\}$ base ortonormale.

Allora la convergenza debole è equivalente alla conv. delle componenti per la succ. v_n limitata

$$v_n \rightarrow v_\infty \iff \langle v_n, e_k \rangle \rightarrow \langle v_\infty, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dim. $\Rightarrow$ definizione con $v = e_k$

$\Leftarrow$ Prop. + Span denso.

Morale

- in dim. finita conv. vettori e conv. comp. sono equi.v.
- in dim. infinita NO (ma è la forte, l'altra è la debole sulle succ. limitate)

Esempio La limitatezza serve. Basta osservare che

$$\langle m e_n, e_k \rangle \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ma $m e_n \not\rightarrow 0$ perché ponendo

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \quad (\text{ben definito per solito motivo})$$

si ha che $\langle m e_n, v \rangle = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi non tende a 0.

— 0 — 0 —

Aggiunto dopo video: enunciato dell'ultimo teorema con tutti i dettagli.

Teorema Sia H uno sp. di Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$, sia $\{v_n\} \subset H$ una successione limitata, e sia $v_\infty \in H$.

Allora i seguenti due fatti sono equivalenti:

- $v_n \rightarrow v_\infty$ (cioè $\langle v_n, v \rangle \rightarrow \langle v_\infty, v \rangle$ per ogni $v \in H$)
- le componenti di v_n tendono alle componenti di v_∞ (cioè $\langle v_n, e_k \rangle \rightarrow \langle v_\infty, e_k \rangle$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 11

Note Title

08/10/2019

Prop. (Continuità forte + debole del prod. scalare)Sia H sp. di Hilbert. Siano $\{u_m\}$ e $\{w_m\}$ due succ. tali che(i) $u_m \rightarrow u_\infty$ (forte)(ii) $w_m \rightarrow w_\infty$ (debole)(iii) w_m sia limitata (un giorno sarà conseguenza della (ii))

Allora

$$\langle u_m, w_m \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$$

Dim. $\langle u_m, w_m \rangle = \underbrace{\langle u_m, w_m \rangle - \langle u_\infty, w_m \rangle}_{\downarrow 0} + \underbrace{\langle u_\infty, w_m \rangle}_{\downarrow (ii) \langle u_\infty, w_\infty \rangle}$

$$|\langle u_m, w_m \rangle - \langle u_\infty, w_m \rangle| \leq \underbrace{\|u_m - u_\infty\|}_{\downarrow (i) 0} \cdot \underbrace{\|w_m\|}_{\leq M (iii)}$$

Oss. Vedere che succede se uso l'altro termine misto.Cose che NON funzionano negli Hilbert di dimensione infinita

① Due conv. deboli non bastano per passare al limite i prod. scal.

$$e_m \rightarrow 0, \text{ ma } \langle e_m, e_m \rangle \equiv 1 \text{ e non tende a } \langle 0, 0 \rangle$$

② La norma non è continua risp. alla conv. debole.

③ Le palle chiuse non sono fortemente compatte

④ Le sfere $\{v \in H : \|v - v_0\| = R\}$ non sono deb. chiuse e non sono compatte né forte, né debole

Teorema 1 Sia H uno sp. di Hilbert.

Allora la norma è SCI, cioè

$$u_m \rightarrow u_\infty \Rightarrow \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|u_m\| \geq \|u_\infty\|$$

Dim. Osservo che basta dim. che

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|u_m\|^2 \geq \|u_\infty\|^2$$

$$\|u_m\|^2 = \|u_m - u_\infty + u_\infty\|^2$$

$$= \underbrace{\|u_m - u_\infty\|^2}_{\geq 0} + \|u_\infty\|^2 + 2 \langle u_m - u_\infty, u_\infty \rangle$$

$$\geq \|u_\infty\|^2 + 2 \underbrace{\langle u_m - u_\infty, u_\infty \rangle}_{\downarrow 0}$$

Teorema 2 Sia H uno sp. di Hilbert **SEPARABILE**

Allora le palle chiuse sono debolmente compatte.

Detto meglio: se $\{u_m\}$ è una succ. limitata, allora esiste $\{n_k\}$ succ. crescente di interi positivi ed esiste $u_\infty \in H$ t.c.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty$$

(ogni succ. limitata ammette s.succ. debolm. conv.)

Dim Sia $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|u_m\| \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale (qui ho usato la separabilità)

Step 1 Dico che esiste $n_k \rightarrow +\infty$ tale

$$\langle u_{n_k}, e_i \rangle \rightarrow \alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{limite delle} \\ \text{componenti} \end{array}$$

Si dimostra con il solito procedimento diagonale.

- Prendo $i=1$, e osservo che $|\langle v_m, e_1 \rangle| \leq \|v_m\| \leq M$
Per Analisi 1 a meno di s.succ. ↑ c.s.

$$\langle v_m, e_1 \rangle \rightarrow \alpha_1$$

Chiamo N_1 gli indici della s.succ.

- Prendo $i=2$, e osservo che $|\langle v_m, e_2 \rangle| \leq M$
Per Analisi 1 esiste una s.succ. DELLA PRECEDENTE t.c.

$$\langle v_m, e_2 \rangle \rightarrow \alpha_2$$

Chiamo $N_2 \subseteq N_1$ i suoi indici

- Proseguendo analog. trovo sottoinsiemi

$$N \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

- Considero m_k tale che $\{m_k\}$ crescente e $m_k \in N_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e questa è quella che va bene.

Step 2 Vorrei tanto porre

$$v_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

Sense la conv. della serie, che è equiv. a $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < +\infty$, che a sua volta è equiv. ad un equi-bound sulle somme parziali. Prendiamo $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2 && \text{(uso somma finita)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2}_{= \|v_{m_k}\|^2} \leq M \end{aligned}$$

Step 3 Abbiamo costruito $u_\infty \in H$ tale che

$$\langle u_{m_k}, e_i \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Sulle succ. limitate sappiamo che la conv. delle componenti è equiv. alla conv. debole

— 0 — 0 —

Esercizio Supponiamo che

(i) $u_m \rightarrow u_\infty$

(ii) $\|u_m\| \rightarrow \|u_\infty\|$

Allora $u_m \rightarrow u_\infty$. [Nei Banach sarà falso]

Dim. $\|u_m - u_\infty\|^2 = \|u_m\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2\langle u_m, u_\infty \rangle \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \|u_m\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2\|u_\infty\|^2 & & \\ \text{— 0 — 0 —} & & \end{array}$$

Occhio alle grandi tentazioni !!!

Supponiamo $u_m \rightarrow u_\infty$. Allora

$$\|u_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle^2$$

↓ per conv. debole

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle^2 = \|u_\infty\|^2$$

NON SI SCAMBIANO LE SERIE CON I LIMITI

Def. (Sp. di Banach) È uno spazio vettoriale V dove è definita una norma, che induce una distanza che lo rende un metrico completo.

Teorema Sia V uno sp. di Banach e sia $\{v_n\} \subseteq V$ una successione.

Allora vale l'implicazione

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < +\infty}_{\text{serie delle norme}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$$

Dim. Considero le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=1}^n \|v_k\| \qquad \hat{S}_n := \sum_{k=1}^n v_k$$

Per ogni $m \geq n$ vale

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_m - \hat{S}_n\| &= \|v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_m\| \\ &\leq \|v_{n+1}\| + \|v_{n+2}\| + \dots + \|v_m\| \\ &= S_m - S_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conclusione: } \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < +\infty &\Rightarrow \{S_n\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \{\hat{S}_n\} \text{ è di Cauchy in } V \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ converge.} \end{aligned}$$

Cosa succede se lo spazio NON è separabile.

Def (Base Hilbertiana in generale) È un sottoinsieme $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ tale che

(i) $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ se $i=j$ e 0 altrimenti $(i,j) \in I^2$

(ii) $\text{Span}(\{e_i\}_{i \in I})$ è denso in H .

Teorema 1 La base Hilbertiana esiste sempre

Dim.

- Considero tutti i sottoinsiemi che verificano (i)
- Osservo che sono ordinati part. per inclusione
- Osservo che i sott. tot. ordinati hanno un maggiorante (cioè l'unione)
- Per Zorn ne esiste uno massimale
- Se non valesse (ii), potrei aggiungere un elemento.

Teorema 2 Data una base $\{e_i\}_{i \in I}$ come sopra, e dato $v \in H$, pongo

$$v_i := \langle v, e_i \rangle \quad \forall i \in I$$

Allora $v_i = 0$ tranne al più una quantità numerabile di indici, e valgono le rappresentazioni di v , $\|v\|$ e $\langle v, w \rangle$ come nel caso numerabile.

— 0 — 0 —

Ist. Analisi Matematica

- LEZIONE 12

Note Title

08/10/2019

Esempi classici di spazi di Hilbert: spazi L^2 Setting classico: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto

$$L^2(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} f(x)^2 dx < +\infty\}$$

(quozientato modulo le funzioni che sono 0 quasi ovunque)

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

$$\|f\| = \left\{ \int_{\Omega} f(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

 σ -algebraSetting + generale: $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$

insieme

misura

+ ∞ concessonum. additiva
sui disgiunti)**Teorema** $L^2(\Omega)$ è uno sp. di Hilbert**Idee della dim.**

- È uno sp. vettoriale (facile verifica: $|f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$)
- Il prod. scalare è ben definito ($|fg| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2$)
Il fatto che $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ segue dall'aver quozientato.
- La completezza non è per nulla ovvia e segue da una serie di risultati preliminari.
Sia $\{f_n\} \subseteq L^2$ succ. di Cauchy

- basta dim. che esiste una s.succ. conv.
 → con il lemma di accelerazione posso assumere, a meno di s.succ., che

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2^n} \quad (\text{basta che la serie converga})$$

Basta quindi dim. che una succ. accel. converge

- Osservo che

$$f_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \dots + (f_n - f_{n-1})$$

quindi basta dim. che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \quad \text{converge}$$

(Guai ad usare che la serie delle somme converge.)

- Considero $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$

e osservo che le somme parziali sono equilm. in $L^2(\Omega)$ e crescenti risp. ad n

- Applico teo. conv. monotona (Beppo - Levi) e deduco che la serie di sopra converge ad una funzione $L^2(\Omega)$ crescendo, quindi converge puntualmente q.o.

- Se conv. con i val. assol., converge senza, e lo fa in maniera dominata, quindi pure in $L^2(\Omega)$.

— o — o —

Nel caso di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ si ha che $L^2(\Omega)$ è separabile

Dim. Devo esibire un denso numerabile.

Basta prendere le comb. lineari finite a coeff. in $\mathbb{Q}$ di funzioni caratteristiche di prodotti di intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$.

— o — o —

"Altro" esempio:

$$\ell^2 = \{ \text{succ. } \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \}$$

In realtà si tratta di $L^2(\mathbb{N})$ rispetto alla misura che conta i p.ti.

In realtà abbiamo dimostr. che tutti gli Hilbert separabili sono (isomorfi a) ℓ^2 .

Esercizio ℓ^2 è completo (dim. elementare)

Dim. Pensiamo

$$\ell^2 = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{k=1}^{\infty} f(k)^2 < +\infty \}$$

Sia $\{f_n\} \subseteq \ell^2$ una succ. di Cauchy.

Step 1 Dimostro che esiste $f_{\infty}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_n(k) \rightarrow f_{\infty}(k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{conv. puntuale})$$

Basta osservare che

$$|f_n(k) - f_m(k)|^2 \leq \|f_n - f_m\|_{\ell^2}^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi $\{f_n(k)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Step 2 Dimostro che $f_{\infty} \in \ell^2$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=1}^m f_{\infty}(k)^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f_n(k)^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\ell^2}^2$$

limitate perché $\{f_n\}$ è di Cauchy

Step 3 Le code sono UNIFORMEMENTE piccole

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \varepsilon$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\|f_m - f_{m_0}\|_{\ell^2} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0$$

Prendo $M \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m \leq m_0 \quad (\text{posso perché sono un numero finito})$$

- Dico che lo stesso M va bene anche per $m \geq m_0$.

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 &= \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k) + f_{m_0}(k)|^2 \\ &\leq 2 \underbrace{\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k)|^2}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + 2 \underbrace{\sum_{k=M}^{\infty} |f_{m_0}(k)|^2}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leq 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 2 \|f_m - f_{m_0}\|_{\ell^2}^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } m \geq m_0 \end{aligned}$$

Step 4 Dimostro che

$$\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \varepsilon$$

Remark dello step 2 (considero $\sum_{k=M_1}^{M_1} \dots$ e poi $M_1 \rightarrow +\infty$)

Step 5 Dimostro che $f_n \rightarrow f_\infty$ in l^2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(k) - f_\infty(k)|^2 = \sum_{k=1}^{M-1} |f_n(k) - f_\infty(k)|^2 \quad (1)$$

$$+ \sum_{k=M}^{\infty} |f_n(k) - f_\infty(k)|^2 \quad (2)$$

$$(2) \leq 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_n(k)|^2 + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_\infty(k)|^2 \leq 4\varepsilon$$

se scelgo M grande

Fissato M , (1) diventa piccolo per n grande.

— o — o —

Consideriamo $L^2((a,b))$ o più semplicemente $L^2((0,\pi))$

Un sottoinsieme ortogonale è $\{\sin(mx)\}$. Infatti

$$\int_0^\pi \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

(Analisi 1)

Moltiplicando per costante opportuna diventa ortonormale

$$\int_0^\pi \sin^2(mx) dx = \frac{\pi}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

In realtà ha pure lo span denso, quindi è una base ortonormale 😊.

Ci sono 3 possibili dimostrazioni

① Stone - Weierstrass

② Conv. unif. delle serie di Fourier per funzioni C^1

③ Sono gli autovettori di un operatore COMPATTO
(vedi corso + avanti)

Essendo una base, ora sappiamo che

$$\sin(mx) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2((0, \pi))$$

Dim. elementare Intanto è una succ. limitata in L^2
 Dico dim. che

$$\int_0^\pi \sin(mx) f(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^2$$

Essendo limitata, basta dim. per $f \in q.r.$ che spazza un denso.

Uso le caratteristiche dei sottointervalli

$$\int_a^b \sin(mx) dx \rightarrow 0$$

"

$$\left[\frac{1}{m} \cdot (-\cos(mx)) \right]_a^b$$



— 0 — 0 —

Esercizio Pensare a $\sqrt{m} \sin(mx)$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 13

Note Title

10/10/2019

SPAZI DI SOBOLEV (Versione baby 😊)

Baby
 Dimensione 1
 Ordine 1 (derivate prime)
 (a,b) intervallo

Generale (lezioni ≥ 25)
 Dimensione d qualunque
 Ordine m qualunque
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque

Due approcci / definizioni

- approccio W (perfetto per passare al limite)
- approccio H (perfetto per tes. algebrici e formule)

Derivata debole, definizione W "W = weak"

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e siano u e v in $L^1_{loc}((a,b))$
 Si dice v è la derivata W -debole di u se

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$$

Brutalmente: v gioca il ruolo di u' nella integr. per parti contro C_c^∞

Proprietà quasi banali

① La der. W -debole, se esiste, è unica.

Siano v_1 e v_2 due derivate deboli di u . Allora

$$\int_a^b v_1 \varphi dx = - \int_a^b u \varphi' dx = \int_a^b v_2 \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$\uparrow$ v_1 è der. deb.
 $\uparrow$ v_2 è deriv. debole

cioè $\int_a^b (v_1 - v_2) \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

FLCV $\Rightarrow v_1(x) = v_2(x)$ per q.o. $x \in (a, b)$.

$\uparrow$ serve davvero in versione L^1_{loc} .

② Linearità Se v_1 è der. w-deb. di u_1
 v_2 " " " u_2

allora $av_1 + bv_2$ è der. w-debole di $au_1 + bu_2$
 per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

Dim.: linearità integrale

③ Compatibilità classica basic: se $u \in C^1(a, b)$, allora la
 deriv. w-deb. coincide con quella classica.

Dim.: int. per parti di Analisi

Prop. (Compatibilità classica meno ovvia)

Supponiamo che v sia deriv. w-deb. di u e che $v \in C^0(a, b)$

Allora $u \in C^1(a, b)$ e $v = u'$.

u coincide q.o. con una funzione C^1

Dim. Considero una qualunque primitiva V di v . Allora

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) \, dx = \int_a^b V(x) \varphi'(x) \, dx$$

$\uparrow$ v è deriv. debole $\uparrow$ int. per parti analisi 1

per ogni $\varphi \in C_c^\infty$. Ma allora

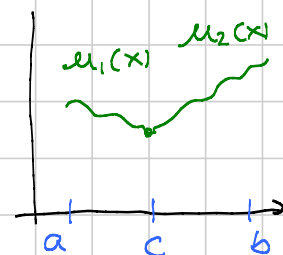
$$\int_a^b (u(x) - V(x)) \varphi'(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

DBR in versione $L^1_{loc} \Rightarrow u(x) = V(x) + c$ per q.o. $x \in (a, b)$

Esempio 1 Sia u una funzione continua e C^1 a tratti

$$u_1 \in C^1([a, c])$$

$$u_2 \in C^1([c, b])$$



Dico che u è deriv. debolmente e la sua derivata debole è l'"unione" di u_1' e u_2' .

(Il valore in c è irrilevante)

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = \int_a^c u_1(x) \varphi'(x) dx + \int_c^b u_2(x) \varphi'(x) dx$$

$$= - \int_a^c u_1'(x) \varphi(x) dx + [u_1(x) \varphi(x)]_a^c - \int_c^b u_2'(x) \varphi(x) dx + [u_2(x) \varphi(x)]_c^b$$

$$= - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx + \boxed{u_1(c) \varphi(c)} - \overset{0}{u_1(a) \varphi(a)} + \underset{0}{u_2(b) \varphi(b)} - \boxed{u_2(c) \varphi(c)}$$

si annullano per la cont. di u

Esempio 2 Sia $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la HEAVISIDE (fizio)

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$



Questa non ha derivata debole.

Supponiamo che $v \in L^1_{loc}((-1, 1))$ sia la derivata w-debole.

$$\int_a^b v(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty$.

Considero una successione φ_n di funzioni
come in figura

(Basta prendere $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$ a
campana e poi porre $\varphi_n(x) := \varphi(nx)$)



$$\int_a^b \underbrace{v(x) \varphi_n(x)}_{\downarrow} dx = \varphi_n(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o puntualm. q.o. dominata da $|v(x)|$

Oss. Un giorno diventerà derivabile, e la sua derivata sarà
una misura (la δ di Dirac).

Teorema (Stabilità per passaggio al limite)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e siano $\{u_n\} \subseteq L^1_{loc}((a,b))$ e
 $\{v_n\} \subseteq L^1_{loc}((a,b))$

Supponiamo che

(i) v_n è der. W-debole di u_n per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^1_{loc}((a,b))$

(iii) $v_n \rightarrow v_\infty$ " "

} cioè $u_n \rightarrow u_\infty$ in
 $L^1(\Omega)$ per ogni
 $\Omega \subset\subset (a,b)$

(basta $\Omega = (a',b')$ con $a < a' < b' < b$)

Allora v_∞ è la deriv. W-debole di u_∞ .

Dim Per ogni $\varphi \in C_c^\infty$ vale

$$\int_a^b u_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v_n(x) \varphi(x) dx$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int_a^b u_\infty(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \varphi(x) dx \quad (\odot)$$

Serve che $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^1((a',b'))$ con $\text{supp di } \varphi \subseteq (a',b')$.

Oss. MOLTO importante Bastano convergenze molto + deboli

- $u_n \xrightarrow{\text{debole}} u_\infty$ e $v_n \xrightarrow{\text{debole}} v_\infty$ in $L^2(\Omega)$ per ogni $\Omega \subset (a,b)$
- " " " " $L^1(\Omega)$ (un giorno)
- ancora meno (non in questo corso).

[Prop] (Le funzioni derivabili debolmente sono le primitive delle loro derivate deboli).

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ che ammette derivata debole $v \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$.

Scelto a caso $x_0 \in (a,b)$, poniamo

$$V(x) := \int_{x_0}^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

ha senso perché $v \in L^1_{\text{loc}}$

Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) = V(x) + c$ per q.o. $x \in (a,b)$.

[Dim.] Supponiamo per semplicità $v \in L^1((a,b))$ senza loc.,
in modo da porre

$$V(x) := \int_a^x v(t) dt \quad \forall x \in [a,b]$$

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ vale

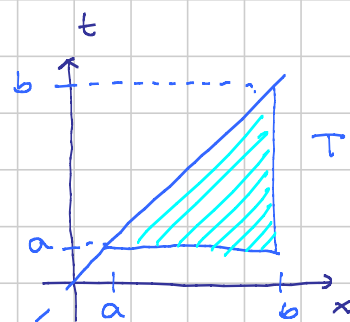
$$\int_a^b V(x) \varphi'(x) dx = \int_a^b dx \varphi'(x) \int_a^x v(t) dt$$

$$(\text{asse } x) = \int_a^b \int_a^x \varphi'(x) v(t) dt dx$$

$$(\text{asse } t) = \int_a^b dt \int_t^b \varphi'(x) v(t) dx$$

$$= \int_a^b dt v(t) \int_t^b \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(t) \varphi(t) dt = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

(der. deb.) = $\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx$



Ma allora

$$\int_a^b (v(x) - u(x)) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

DBR $\Rightarrow$ tesi

Se v è solo L^1_{loc} , allora la primitiva va definita a partire da $x_0 \in (a, b)$ e si complica un bel po' l'integrale sul triangolo (mettere a posto per esercizio).

— o — o —

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 14

Note Title

10/10/2019

Oss. Se $v \in L^1_{loc}((a,b))$ e $x_0 \in (a,b)$, allora

$$V(x) := \int_{x_0}^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

è CONTINUA.

Dim. Dato $y_0 \in (a,b)$

$$V(y_0+h) - V(y_0) = \int_{y_0}^{y_0+h} v(t) dt = \int_a^b v(t) \underbrace{\mathbb{1}_{[y_0, y_0+h]}(t)}_{\substack{\text{funzione} \\ \text{caratteristica}}} dt$$

↓
q.o. dominatamente

Corollario Se si ammette derivata W -debole in (a,b) , allora u coincide q.o. con una funzione continua.

Notazione Nel seguito

- ① diremo che u è una funzione continua
- ② parleremo di valori PUNTUALI di $u(x)$, intendoli come i valori assunti dall'unico rappresentante continuo.

Def. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente
Si indica con

$$W^{1,p}((a,b))$$

l'insieme delle $u \in L^p((a,b))$ che ammettono derivata W -debole $v \in L^p((a,b))$ (senza i loc.)

Oss. Non essendoci i l.o.c., da $\forall x$ risulta definita per ogni $x \in [a, b]$, estremi compresi, e di conseguenza posso pensare u definita e continua su $[a, b]$ chiuso. Questo autorizza a parlare di $u(a)$ e $u(b)$.

Teorema (Hölderianità delle funzioni di Sobolev)

Sia $p \in (1, +\infty]$ (N.B.: ho escluso $p=1$)

e sia $u \in W^{1,p}([a, b])$.

Sia q tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q=1$ se $p=+\infty$)

Allora u è $\frac{1}{q}$ -Hölder su (a, b) e vale la stima

$$|u(y) - u(x)| \leq \underbrace{\|u'\|_{L^p([a, b])}}_{\text{derivata W-debole}} |y - x|^{\frac{1}{q}} \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2$$

Dim. Sappiamo che u è la prim. della deriv. W-deb. u' .
Supponiamo wlog $y > x$. Allora

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= \int_x^y u'(t) dt = \int_a^b u'(t) \underbrace{\mathbb{1}_{[x, y]}(t)}_{\frac{1}{q}} dt \\ &\stackrel{(\text{Hölder})}{\leq} \left\{ \int_a^b |u'(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b \mathbb{1}_{[x, y]}^q(t) dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|u'\|_{L^p([a, b])} \cdot |y - x|^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Questo vale se $p \in (1, +\infty)$. Il caso $p = +\infty$ è ancora più semplice (non serve nemmeno Hölder) e da u risulta Lipschitziana.

— o — o —

Oss. Limitandosi anche solo agli $x \in (a, b)$, avremmo ottenuto che u è unif. cont. in (a, b) , dunque estendibile con continuità su tutto $[a, b]$ (vedi Analisi 1).

Def. (Derivata H-debole) Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e siano u e v in $L^1_{loc}((a,b))$.

Si dice che v è la deriv. H-debole di u se esiste

$$\{u_n\} \subseteq C^\infty((a,b)) \quad (\text{oppure } \{u_n\} \subseteq C^1((a,b)))$$

↑ non sto mettendo c

tale che

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } L^1_{loc}((a,b)) \\ u'_n &\rightarrow v && \text{"} \end{aligned}$$

↑ derivate vere

Oss. Usare succ. in C^∞ o in C^1 è la stessa cosa (esercizio)

Oss. Anche le proprietà più semplici, tipo l'unicità, sono difficili da ottenere dalla def. H.

Esempio $u(x) = |x|$ ammette derivata H-debole in $(-1,1)$

Devo trovare approx. C^∞ : $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

Devo verificare 2 cose

- $u_n(x) \rightarrow |x|$ in $L^1((-1,1))$
(lo fa pure uniformemente)

- $u'_n(x) \rightarrow \pm 1$ in $L^1((-1,1))$ (qui non può essere unif.)



$$u'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{x}{|x|}$$

puntualmente per
 $x \neq 0$

e vale la dominazione
 $|u'_n(x)| \leq 1$ sempre

— 0 — 0 —

Teorema ($H \Rightarrow W$) La derivata H -debole è anche derivata W -debole.

Dim. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ vale

$$\int_a^b u_m(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b u_m(x) \varphi(x) dx$$

↑
Analisi 1

Ora passo al limite RHS e LHS.

Corollario Unicità + tutte le propr. della lex. prec.

Teorema ($W \Rightarrow H$, e quindi $H=W$).
Le derivate W deboli sono H -deboli

Dim. Siano u e v in $L^1_{loc}((a,b))$ con v deriv. W -debole di u .

Devo trovare $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ t.c.

- $u_m \rightarrow u$
 - $v_m \rightarrow v$
- } in L^1_{loc}

In uno dei tanti modi possibili approssimo v con funzioni $v_m \in C_c^\infty((a,b))$. (si può fare in modo elementare anche senza convoluzione via step functions)

Considero le funzioni integrali

$$V_m(x) := \int_{x_0}^x u_m(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

e dico che a meno di costanti sono le u_m che cerco
(a posteriori mi conviene usare $u(x_0)$ come costante)
Dico che

$$V_m(x) \rightarrow V_\infty(x) = \int_{x_0}^x v(t) dt = u(x) - u(x_0)$$

La convergenza è puntuale e dominata sui sottointervalli $(a', b') \subset\subset (a, b)$, quindi pure $L^1((a', b'))$.

Questo completa la dimostrazione

— o — o —

Def. (Spazi di Sobolev H , prima versione)

Si indica con $H^{1,p}((a,b))$ l'insieme delle funzioni

$u \in L^p((a,b))$ che ammettono derivata H -debole $u' \in L^p((a,b))$.

Detto in altro modo, diciamo che

$$u \in H^{1,p}((a,b))$$

se esiste $\{u_n\} \subseteq C^{1,p}((a,b)) = C^1((a,b)) \cap \underbrace{L^p((a,b))}_{\substack{u_n \in L^p \\ u'_n \in L^p}}$

tale che

$$\bullet u_n \rightarrow u \text{ in } L^p$$

$$\bullet u'_n \rightarrow u' \text{ in } L^p$$

$\uparrow$ derivata debole

Oss. Nel teorema precedente, se u e u' stanno in L^p con $p < +\infty$, allora le approssimanti che abbiamo costruito convergono pure in $L^p((a,b))$.

Def. (Spazi di Sobolev, def. H astratta)

Poniamo

$$C^{\infty,p}((a,b)) = \{u \in C^\infty((a,b)) : u \text{ e } u' \in L^p((a,b))\}$$

Osservo che $C^{\infty,p}((a,b))$ è uno sp. metrico rispetto alla distanza

$$\text{dist}(f, g) := \|f - g\|_{L^p} + \|f' - g'\|_{L^p}$$

Allora $H^{1,p}((a,b))$ è il completamento di $C^{\infty,p}$ risp. a dist.

Oss. Il teorema di approx. detto sopra dice che le 2 definizioni H sono equivalenti e sono equivalenti alla defiu. W , quindi

$$W^{1,p}((a,b)) = H^{1,p}((a,b)) \quad \text{se } p < +\infty$$

Oss. La def. H è comoda "per fare i conti".
 — o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 15

Note Title

14/10/2019

ROAD MAP DEL METODO DIRETTOSetting: S insieme, $F: S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Vogliamo mostrare che

$$\min \{F(x) : x \in S\}$$

esiste.

- 1) **Formulazione debole** Cerco $\hat{S} \supseteq S$ e cerco $\hat{F}: \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\hat{F}(x) = F(x) \quad \forall x \in S$$

$\leq$ (basta questa)

- 2) **Compattezza** Sia $\{x_n\} \subseteq \hat{S}$ una successione per cui esiste $M \in \mathbb{R}$ (davvero reale) tale che

$$\hat{F}(x_n) \leq M \quad (x_n \text{ stanno in un sottolivello})$$

Spero di trovare una nozione di conv. in $\hat{S}$ t.c. $\{x_n\}$ ammette s.succ. conv. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

- 3) **Semicontinuità** Spero che, rispetto alla noz. di conv. di sopra, accada che

$$\hat{F} \text{ è Scl}$$

Se [1], [2] e [3] riescono, allora di sicuro esiste

$$\min \{ \hat{F}(x) : x \in \hat{S} \}$$

[4] Regolarità Dimostrare che esiste p.to di min. x_0 per $\hat{F}$ che sta in S (quello vero) e verifica $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$.

Se anche [4] riesce, allora x_0 è p.to di min. in S poiché

$$F(x_0) = \hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) \leq F(x) \quad \forall x \in S$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 [4] x_0 è p.to di min. [1]

Esempio

$$F(u) = \int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \sin(u^2) dx$$

Voglio dim. che ha minimo in

$$X := \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, u(2) = 7 \}$$

[1] Formulazione debole. Entrano in gioco i Sobolev

$$\hat{X} := \{ u \in W^{1,2}((0,2)) : \underbrace{u(0) = 3, u(2) = 7}_{\substack{\text{i valori puntuali, anche} \\ \text{al bordo, sono ben definiti}}} \}$$

Notazione: $H^1(\Omega)$ è sinonimo di $H^{1,2}(\Omega)$.

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \sin(u^2) dx \quad u \in H^1((0,2))$$

$\uparrow$ $\underbrace{\hspace{2cm}}$
 derivata funzione continua
 debole quindi ha senso integrarla

Cosa guardare:

- che le cond. al bordo che si impongono abbiano senso
- che gli integrali presenti nel funzionale abbiano senso
- precisione se $\hat{F}$ ha valori in $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

[2] Compattzza Nozione di convergenza in $\hat{X}$. In questo caso dico che $u_m \rightarrow u_\infty$ se

- $u_m \rightarrow u_\infty$ unif. in $[0,2]$
 - $u_m \rightarrow u_\infty$ debole L^2
- Se u_m soddisfa le DBC, allora anche u_∞ lo fa

In generale

- qualcosa di forte sulle funzioni
- qualcosa di debole sulle derivate

Vediamo che si ha compattzza dei sottolivelli. Sia $\{u_m\} \subseteq H^1$ tale che

$$\int_0^2 \frac{1}{2} u_m^2 + \sin(u_m^2) \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- Sistemiamo le derivate. Dalla stima sopra abbiamo

$$M \geq \hat{F}(u_m) \geq \int_0^2 \left(\frac{1}{2} u_m^2 - 1 \right) \geq \frac{1}{2} \int_0^2 u_m^2 - 2$$

$$\leadsto \underbrace{\int_0^2 u_m^2 dx}_{\|u_m\|_{L^2}^2} \leq 2M + 4$$

$\leadsto$ limitazione (equi) in L^2

Per compattzza debole delle palle esiste

$$u_{m_k} \rightarrow v_\infty \text{ debole in } L^2((0,2)).$$

- Si sistemano le funzioni. Queste sono equi- $\frac{1}{2}$ Hölder poiché

$$|u_m(y) - u_m(x)| \leq \underbrace{\|u_m\|_{L^2}}_{\leq \text{costante}} |y-x|^{\frac{1}{2}} \quad \forall (x,y) \in [0,2]^2$$

Inoltre le u_m sono equilimitate in quanto

$$|u_m(x)| \leq \underbrace{|u_m(0)|}_{\substack{\text{"3"} \\ \text{(DBC)}}} + \underbrace{|u_m(x) - u_m(0)|}_{\leq \|u_m\|_{L^2} \underbrace{|x-0|}_{\leq 2}} \leq M'$$

Grazie a equilimitatezza + equicontinuità + opl. di $[0,2]$ posso trovare una s.succ. di $u_{m_{k_i}}$ (quella che andava bene per le derivate) tale che

$$u_{m_{k_i}} \longrightarrow u_\infty \text{ unif. in } [0,2].$$

Dal solito "doppio scambio" deduciamo che $v_\infty = \hat{u}_\infty$

$$\int_0^2 u_{m_{k_i}}(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^2 \hat{u}_{m_{k_i}}(x) \varphi(x) dx$$

$$\int_0^2 u_\infty(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^2 v_\infty(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

Osserviamo che $u_\infty \in \hat{X}$, cioè sta in H^1 e ha le DBC grazie alla conv. unif.

3 **SCI** Sia $u_m \rightarrow u_\infty$ risp. alla nozione di sopra

- Parte di funzione

$$\int_0^2 \sin(u^2) dx \longrightarrow \int_0^2 \sin(u_\infty^2) dx$$

↑
Analisi 2 grazie alla
conv. unif.

- Parte di derivata:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^2 \sin(x)^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_0^2 \sin(x)^2 dx$$

↑
sci debole della norma

Ora sappiamo che esiste min $\{\hat{F}(u) : u \in H^1 + \text{DBC}\}$

- [4] **Regolarità** Sia u_0 un pto di min di $\hat{F}$ in $\mathbb{X}$.
Voglio dim. che $u \in C^4([0, 2])$, e pure C^∞ .
Questo si fa in 3 fasi

[4.1] ELE debole

[4.2] Guadagno C^1

[4.3] BOOTSTRAP fino a C^∞

[4.1] Data $v \in C_c^\infty((0, 2))$ pongo

$$\varphi(t) := \int_0^2 \left[\frac{1}{2} (u_0 + tv)^2 + \sin(u_0 + tv)^2 \right] dx = \hat{F}(u_0 + tv)$$

e calcolo $\varphi'(0)$. Se tutto va bene (ma va verificato) viene

$$\varphi'(0) = \int_0^2 [\sin(x) \dot{v}(x) + 2u_0(x)v(x) \cos(u_0(x)^2)] dx$$

Se u_0 è pto di min, questo deve fare 0, cioè

$$\int_0^2 \underbrace{u_0(x)}_f \underbrace{\ddot{v}(x)}_{\dot{\varphi}} dx = - \int_0^2 \underbrace{2 u_0(x) \cos(u_0(x)^2)}_g \underbrace{v(x)}_{\varphi} dx$$

Questo dice che g è la deriv. debole di f , cioè

$$(\ddot{u}_0)' = 2 u_0 \cos(u_0^2) \quad (\text{ELE di una volta})$$

Derivata debole
della derivata debole

[4.2] $u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$
Per compatibilità classica non banale segue che

$$\ddot{u}_0 \in C^1 \quad \text{e quindi} \quad u_0 \in C^2$$

e quindi u_0 è soluz. classica di ELE, cioè

$$\ddot{u}_0 = 2 u_0 \cos(u_0^2)$$

$$[4.3] \quad u_0 \in C^2 \Rightarrow \text{RHS} \in C^2 \Rightarrow \ddot{u}_0 \in C^2 \Rightarrow u_0 \in C^4$$

... e così via fino a C^∞ .

L'unica cosa da sistemare è la possibilità di derivare sotto il segno di integrale, il che si traduce nel trovare una giustificazione per la "presunta derivata":

$$\varphi'(t) = \int_0^2 \underbrace{(\ddot{u}_0 + t \ddot{v}) \dot{v} + 2(u_0 + tv) \cos((u_0 + tv)^2) v}_{\leq g(x) \text{ integrabile}}$$

In questo caso è praticamente gratis ($v \in C_c^\infty$, $\ddot{u}_0 \in L^2$
— o — o — $\ddot{u}_0 \in L^1 \dots$)

Isb. Analisi Matematica - LEZIONE 16

Note Title

14/10/2019

Esempio 1 $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} u^2 + u \sin u \right] dx \quad u(0) = 3, u(2) = 7$

1 Formulazione debole in H^1 è standard

2 $\hat{F}(u_n) \leq M$ vogliamo dimostrare che

$$u_{n_k} \rightarrow u_{\infty} \text{ unif. in } [0, 2]$$

$$u_{n_k} \rightarrow u_{\infty} \text{ debole } L^2$$

Il pto chiave è ottenere $\|u_{\infty}\|_{L^2} \leq M'$. Poi è uguale.
(a voce nel video).

Guaio: la "parte di funzione" $u \sin u$ non è limitata dal basso.

Come sempre $|u_n(y) - u_n(x)| \leq \|u_n\|_{L^2} |y-x|^{1/2}$ da cui

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(0)| + |u_n(x) - u_n(0)| \\ &\leq \underset{\downarrow \text{DBC}}{3} + \underset{\text{lunghezza interv.}}{\|u_n\|_{L^2} \cdot 2^{1/2}} \quad \forall x \in [0, 2] \end{aligned}$$

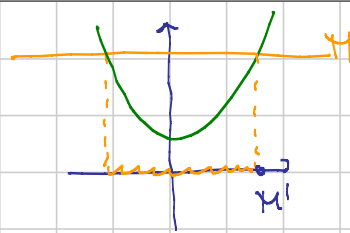
Ora

$$\begin{aligned} M &\geq \int_0^2 \frac{1}{2} u_n(x)^2 + u_n(x) \sin(u_n(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2}^2 - \int_0^2 |u_n(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2}^2 - \underbrace{(3 + \sqrt{2} \|u_n\|_{L^2})}_{\text{bound } L^\infty \text{ di sopra}} \cdot 2 \quad \uparrow \text{lunghezza interv.} \end{aligned}$$

Questa è diseq. di 2° grado nella incognita $\|u_n\|_{L^2}$,
ed è soddisfatta per valori interi

Da questo otteniamo che

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M'$$



(Bastava ottenere $\Phi(\|\dot{u}_n\|_{L^2}) \leq M$ con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = +\infty)$$

Da qui in poi è come negli esempi precedenti

— o — o —

Che cosa abbiamo davvero usato?

$$L(x, s, p) \geq Ap^2 - B|s|^\alpha - C$$

con $A > 0$ e $\alpha < 2$.

$$M \geq \int_a^b L(x, u_n(x), \dot{u}_n(x)) dx$$

$$\geq A \int_a^b \dot{u}_n(x)^2 dx - B \int_a^b |u_n(x)|^\alpha dx - C \int_a^b 1 dx$$

$$\geq A \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - B(b-a) \|u_n\|_{L^\infty}^\alpha - C(b-a)$$

$$\geq A \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - B(b-a) (|u_n(a)| + \|\dot{u}_n\|_{L^2} |b-a|^{1/2})^\alpha - C(b-a)$$

$\Phi(\|\dot{u}_n\|_{L^2}) \rightarrow +\infty$ per $\|\dot{u}_n\| \rightarrow \pm\infty$
perché $\alpha < 2$.

Oss. Nel caso $\alpha = 2$ entrano in gioco i valori delle costanti

— o — o —

Esempio 2 Senza DBC

$$\min \left\{ \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + (u - \sin x)^6 : u \in C^1([0, 2]) \right\}$$

[1] NO PBM

[2] Solita nozione di conv.

$$\hat{F}(u) \leq M \Rightarrow \|u\|_{L^2}^2 \leq 2M \quad \text{☺}$$

Questo fornisce equi $\frac{1}{2}$ -Hölder sulle u_n , ma serve un bound uniforme e non ho DBC.

$$\hat{F}(u) \leq M \Rightarrow \int_0^2 (u_n(x) - \sin x)^6 dx \leq M$$

|| (Teo. media integrale)

$$2 \cdot (u_n(x_n) - \sin x_n)^6 \leq M$$

↑ ↑ p.to misterioso

$\Rightarrow |u_n(x_n)| \leq M'$ e da qui concludo

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_n)|}_{\leq M'} + \underbrace{|u_n(x) - u_n(x_n)|}_{\leq \|u_n\|_{L^2} |x - x_n|^{1/2}} \leq M' + \|u_n\|_{L^2} |x - x_n|^{1/2}$$

|b-a|^{1/2}

Da qui tu poi è gratis.

—_b 0 —_a —

Esempio 3 $F(u) = \int_a^b [(\dot{u}^2 + \sin(u)) + u^4] dx$

Vogliamo minimizzare su $C^1([a, b])$ senza DBCs.

[1] Tranquillo

[2] $L(x, s, p) \geq p^2 - 1 \Rightarrow$ stima su $\|u_m\|_{L^2}$

$$L(x, s, p) \geq s^4 - 1 \Rightarrow \int_a^b u_m(x)^4 dx \leq 4$$

$\Rightarrow$ bound unif. su $|u_m(x)|$ per teo. media integrale

[3] SCI $\rightarrow$ ponte di funzione è gratis (conv. unif. $\rightarrow$ conv. degli integrali).

$\rightarrow$ Ponte di derivata: se $u_m \rightarrow u_\infty$, posso concludere

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b (u_m^2 + s u_m) dx \geq \int_a^b (u_\infty^2 + s u_\infty) dx$$

PAROLA MAGICA: convessità

[Prop.] Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- di classe C^1
- convessa
- che verifica la stima $|\dot{\varphi}(x)| \leq Ax + B$.

Sia $\{v_m\} \subseteq L^2((a, b))$ una successione con
 $v_m \rightharpoonup v_\infty$ (debole L^2)

Allora

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(v_m(x)) dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx$$

[Dim] Partiamo dalla solita

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + b \varphi'(a) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(v_n(x)) dx &= \int_a^b \varphi(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b) dx \\ &\geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx + \int_a^b \varphi'(v_\infty(x)) (v_n(x) - v_\infty(x)) dx \end{aligned}$$

Se $\varphi'(v_\infty(x)) \in L^2$, l'ultimo termine $\rightarrow 0$ per definis. di conv. debole.

L'appartenenza segue dal bound su $\varphi'(x)$

$$|\varphi'(v_\infty(x))|^2 \leq \underbrace{(A|v_\infty(x)| + B)}_0^2 \text{ non integrabile.}$$

Tornando all'esempio, basta verificare che

$$\varphi(p) = p^2 + \sin p$$

è convessa (basta calcolare φ'')

$$\begin{aligned} \boxed{4} \quad \underline{\text{Regolarità}} \quad & \frac{d}{dt} \hat{F}(u_0 + tv) \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b (\dot{u}_0 + t\dot{v})^2 + \sin(\dot{u}_0 + t\dot{v}) + (u_0 + tv)^4 \end{aligned}$$

(qui $v \in C_c^\infty$ e $u \in H^1$)

Si può derivare sotto il segno di integrale e si arriva a

$$\int_a^b (2\dot{u}_0 + \cos(\dot{u}_0)) \dot{v} + 4u_0^3 v = 0$$

Questa si può riscrivere come

$$\int_a^b \underbrace{(2\dot{u}_0 + \cos(\dot{u}_0))}_{\varphi} \underbrace{\dot{v}}_{\varphi} dx = - \int_a^b \underbrace{4u_0^3}_{g} \underbrace{v}_{\varphi}$$

da cui

derivata debole

$$(2u_0 + \cos(u_0))' = +4u_0^3$$

$\uparrow$ derivata debole $\uparrow$ conetto dopo video

$$(L_p)' = L_s$$

$$\boxed{4.2} \quad u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow (2u_0 + \cos(u_0)) \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^1$$

$\uparrow$ Hope

$$\psi(p) := 2p + \cos(p) \quad (= \varphi'(p))$$

$$u_0 = \psi^{-1}(\text{RHS})$$

Cosa sappiamo di ψ^{-1} ? Per il teo. della funzione inversa sappiamo che è C^∞ .

Serve qui che

$$\psi'(p) \geq 1 \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

(Sempre la solita convessità di $\varphi(p)$ 😊).

— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 17

Note Title

15/10/2019

Approccio variazionale alle equazioni differenziali

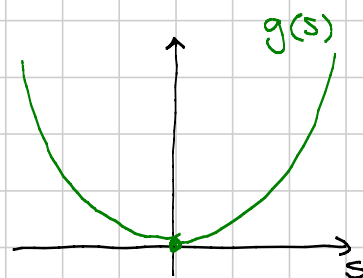
Esempio Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{eq. diff.} \\ \text{DBC} \end{array}$$

Problema: discutere esistenza e unicità di $u \in C^2([0,2])$ che risolva eq. diff. + DBC.

Strategia: inventarsi un pbm. di min. di cui l'eq. sia ELE

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \arctan u \\ (L\varphi)' &= Ls \end{aligned}$$



Considero una primitiva di $\arctan$

$$g(s) := \int_0^s \arctan t \, dt \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s)$$

e il problema di minimo

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right)}_{F(u)} : u \in \underbrace{C^2}_{\uparrow} \text{ ? } \quad u(0)=3, u(2)=7 \right\}$$

Applico il metodo diretto.

1 Formulazione debole

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 \frac{1}{2} u^2 + g(u) \quad u \in H^1((0,2)) = W^{1,2}((0,2))$$

Osservo che l'integrale ha senso e viene $\in \mathbb{R}$
che le DBC hanno senso in H^1 .

2 Compattezza Consideriamo la noz. di conv.

- debole L^2 sulle derivate
- unif. sulle funzioni in $[0,2]$

Data una $\{u_n\} \subseteq H^1$ con

$$\hat{F}(u_n) \leq M$$

voglio trovare s. succ. t.c.

$$\begin{array}{ll} u_{n_k} \rightarrow u_\infty & \text{unif. in } [0,2] \\ u'_{n_k} \rightarrow u'_\infty & \text{debole } L^2 \end{array}$$

- Stima sulle derivate: immediata da $L(x,s,p) \geq \frac{1}{2}p^2$
 $\uparrow g(s) \geq 0$ sempre
- Stima sulle funzioni:

$\rightarrow$ equi $\frac{1}{2}$ -Hölder grazie alla stima sulle derivate

$\rightarrow$ equi L^∞ grazie a DBC + equi-Hölder

Grazie alla stima sulle derivate esiste $\overset{\circ}{\lim}_{n_k} \rightarrow v_\infty$
(comp. debole delle palle)

Grazie alla stima sulle funzioni esiste $\lim_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif.
(Ascoli-Arzelà)

Al solito modo u'_∞ esiste ed è v_∞ .

Inoltre u_∞ soddisfa DBC per conv. unif.

[3] SCI Supponiamo $u_n \rightharpoonup u$ secondo la nozione

$$\bullet \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 u_n(x)^2 dx \geq \int_0^2 u(x)^2 dx$$

(SCI debole della norma)

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 g(u_n(x)) dx = \int_0^2 g(u(x)) dx$$

(conv. unif. + continuità della $g(s)$)

A questo p.to sappiamo che esiste

$$\min \{ \hat{F}(u) : u \in H^1((0,2)) + \text{DBC} \}$$

[4] Regolarità Sia u_0 un qualunque p.to di min.

[4.1] Ricavo ELE debole. Data $v \in C_c^\infty((0,2))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{F}(u_0 + tv) &= \frac{d}{dt} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} (\dot{u}_0 + t\dot{v})^2 + g(u_0 + tv) \right] dx \\ &= \int_0^2 (\dot{u}_0 + t\dot{v}) \dot{v} + \arctan(u_0 + tv) v \end{aligned}$$

Per fare questo conto serve una dominazione della presunta derivata

$$\underbrace{|\dot{u}_0(x) + t\dot{v}(x)| \cdot |\dot{v}(x)|}_{\leq \text{cost}} \leq \frac{\pi}{2} \leq \text{cost} \quad \underbrace{|\arctan(u_0 + tv)| \cdot |v(x)|}_{\leq \text{cost}}$$

$$\underbrace{|\dot{u}_0(x)|}_{\in L^1} + \underbrace{|t| \cdot |\dot{v}(x)|}_{\leq \text{cost}} \quad t \in (-1,1)$$

Dall'essere u_0 p.to di min. segue

$$\int_0^2 \underbrace{u_0(x)}_f \underbrace{v'(x)}_{\varphi} dx = - \int_0^2 \underbrace{\arctan(u_0(x))}_g \underbrace{v(x)}_{\varphi} dx \quad \forall v \in C_c^\infty$$

Dalla def. di derivata debole segue che

$$\underbrace{(u_0)'}_{\text{deriv. deb. della deriv. debole}} = \arctan u_0$$

4.2 Guadagno C^2 .

$$u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in C^0([0,2]) \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow u_0 \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^2 \quad \text{😊}$$

4.3 Bootstrap fino a C^∞

Conclusione: il problema iniziale ha almeno una soluzione

UNICITÀ Claim: la soluzione dell'eq. iniz. è unica

Achtung! Il min. è unico, quindi la soluz. è unica.

NO: potrebbero esserci soluzioni che non arrivano da minimi (ELE potrebbe essere soddisfatta da p.ti di max o altri stazionari)

1° approccio **via funzionale**

① Dimostro che tutte le sol. dell'eq. sono p.ti di min.

② Dimostro che il p.to di min. è unico

Entrambe seguono dalla convessità.

Sia u_0 soluz. dell'eq. Calcolo $F(u)$ con $u \in H^1$ qualunque

$$\begin{aligned}
 F(u) &= F(u_0 + v) = \int_0^2 \frac{1}{2} (\dot{u}_0 + \dot{v})^2 + g(u_0 + v) \\
 &\geq \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \dot{u}_0^2}_{\text{ho usato } g(a+b) \geq g(a) + g'(a)b} + \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 + \int_0^2 g(u_0) + \int_0^2 \arctan u_0 v}_{\text{ho usato } g(a+b) \geq g(a) + g'(a)b} \\
 &= \underbrace{F(u_0)}_{\text{ho usato } g(a+b) \geq g(a) + g'(a)b} + \underbrace{\int_0^2 (\dot{u}_0 \dot{v} + \arctan u_0 v)}_{=0 \text{ perché } u_0 \text{ risolve ELE}} + \frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2
 \end{aligned}$$

$$\geq F(u_0)$$

con uguaglianza se e solo se $\dot{v} \equiv 0$
 " $v \equiv \text{cost}$

ma $\text{cost} = 0$ perché v si annulla al bordo.

2° approccio Guardo solo l'equazione.

Siano u e v due soluzioni. Allora

$$\ddot{u} = \arctan u$$

$$\ddot{v} = \arctan v$$

Sottraggo: $\ddot{u} - \ddot{v} = \arctan u - \arctan v$

Moltiplico per $u - v$

$$(\ddot{u} - \ddot{v})(u - v) = \underbrace{(\arctan u - \arctan v)(u - v)}_{\geq 0 \text{ sempre perché } \arctan s \text{ è debol. crescente}}$$

Integro fra $[0, 2]$

$$\int_0^2 (\ddot{u} - \ddot{v}) (u - v) dx = \int_0^2 (\dots) (u - v) \geq 0$$

|| per parti

$$-\underbrace{\int_0^2 (\dot{u} - \dot{v})^2}_{\leq 0} \quad (\text{il termine di bordo viene 0 grazie a } u - v)$$

L'unica possibilità è che sia tutto = 0, da cui $u = v$

— 0 — 0 —

Come ci aspettiamo la soluzione?

Claim: u è convessa

$$\ddot{u} = \arctan u$$

Senza dim. che $u(x) \geq 0$ in $[0, 2]$.

A sono 2 modi

① Argomento di truncamento:

truncando rispetto sui due termini del funzionale

② Quando l'eq. : se diventa negativa, il minimo di u è assunto in un p.to $x_0 \in (0, 2)$

↑ ↑

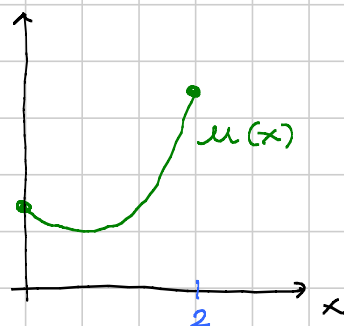
Ma allora $\ddot{u}(x_0) \geq 0$ e non è possibile se $u(x_0) < 0$.

In realtà $u(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Se $u(x_0) = 0$, allora x_0 sarebbe un p.to di min., quindi $\ddot{u}(x_0) = 0$, ma allora u risolverebbe

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{u} = \arctan u \\ u(x_0) = 0 \\ \ddot{u}(x_0) = 0 \end{array} \right\} \text{Pbm. di Cauchy di Analisi 2 che ha soluzione unica } u(x) \equiv 0.$$

— 0 — 0 —



Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 18

Note Title

15/10/2019

Esempio 1 $\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 3 \quad \text{DBC} \\ \dot{u}(2) = 0 \quad \text{NBC} \end{cases}$

$$\min \left\{ \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) : u(0) = 3 \text{ e basta} \right\}$$

↑ Non metto $\dot{u}(2) = 0$

Funzionano [1], [2] e [3] come sempre (basta una DBC per avere limitazione su u) e quindi esiste p.to di min $u_0 \in H^1$ che verifica $u_0(0) = 3$.

[4] Regolarità (e nascita della NBC)

[4.1] Usando $v \in C_c^\infty((0,2))$ otteniamo

$$\int_0^2 \dot{u}_0(x) \dot{v}(x) dx = - \int_0^2 \arctan(u_0(x)) v(x) dx \quad (*)$$

da cui deduciamo che $(\dot{u}_0)' = \arctan u_0$

[4.2] Come prima otteniamo $u_0 \in C^2([0,2])$.

Ora possiamo usare delle v che non si annullano in $x=2$. Tornando nella (*), dove ora tutto è classico, int. per parti e arriviamo a

$$[\dot{u}_0(x) v(x)]_0^2 = 0 \quad (\text{il resto è andato via})$$

$$\dot{u}_0(2) v(2) - 0 = 0 \quad \leadsto \quad \dot{u}_0(2) = 0 \quad \leadsto \quad \text{NBC on the road.}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 7 \end{cases}$$

Ricordo che le NBC sono del tipo $L_p = 0$. Volei tanto $L_p = p - 7$

Uso $L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 - 7p + g(s)$

$(L_p)' = L_s$ diventa $(\dot{u} - 7)' = \arctan u$
 $\ddot{u} = \arctan u$

[1] Come sempre

[2] Compattità Per avere la stima sulla derivata serve

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{4} p^2 - A$$

[3] SCI Si usa che, se $u_n \rightharpoonup u$ al solito modo

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \dot{u}_n(x)^2 dx \geq \int_0^2 \dot{u}_\infty(x)^2 dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_n(x)}_{\text{prod. scalare tra } \dot{u}_n \text{ e } \dot{u}_\infty} dx = \int_0^2 \dot{u}_\infty(x) dx$$

prod. scalare tra $\dot{u}_n$ e $\dot{u}_\infty \equiv 1$.

[4] Regolarità come sempre. Dall'integrazione per parti nasce

$$L_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = 0 \quad \text{per } x=2, \text{ cioè } \dot{u}_0(2) = 7$$

— o — o —

Esempio 3
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \dot{u}(0) = 3 \\ u(2) = 7 \end{cases}$$

Due approcci: $\rightarrow$ cambio variabile
 $\rightarrow$ riadatto L_p

① Cambio variabile. Cerco una funzione $u_1(x)$ che rispetti le NBC strane

$$u_1(x) = 3x + x^2 \quad \dot{u}_1(x) = 3 + 2x$$

Vedo cosa risolve

$$w(x) = u(x) - u_1(x)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}(x) &= \ddot{u}(x) - \ddot{u}_1(x) = \arctan(u(x)) - 2 \\ &= \arctan(w(x) + u_1(x)) - 2 \end{aligned}$$

Morale: w risolve

$$\begin{cases} \ddot{w} = \arctan(w + 3x + x^2) - 2 \\ \dot{w}(0) = 0 \\ \dot{w}(2) = 0 \end{cases}$$

Oss. Se w risolve il problema sopra, allora

$$u(x) = w(x) + 3x + x^2$$

risolve il problema originario.

Considero

$$F(w) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{w}^2 + g(w + 3x + x^2) - 2w \right) dx$$

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + g(s + 3x + x^2) - 2s$$

Osservo che ELE + NBC sono quello che voglio.

1 Ok come sempre

esponente < 2

2 Compattezza

I soliti conti seguiti da $L(x, s, p) \geq \frac{1}{2}p^2 - A|s|$ ↓

Da qui segue stima su $\|u_m\|_{L^2}$.

Ora servirebbe una stima su u . Non avendo DBC posso contare solo su stime integrali, e NON le posso ottenere perché

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s + 3x + x^2) - 2s = -\infty$$

↑
cresce come $\frac{\pi}{2}s$

Infatti: il pbm. di min. non ha soluzione e l'inf. è $-\infty$
Basta usare $w_m(x) \equiv m$ e diventa

$$F(w_m) = \int_0^2 (g(m + 3x + x^2) - 2m) dx \rightarrow -\infty$$

per m grande diventa
negativo a piacere

Non è che il pbm. diff. NON può avere soluzione?

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \ddot{u}(0) = 3 \\ \ddot{u}(2) = 7 \end{cases}$$

Lagrange: $\underbrace{\ddot{u}(2) - \ddot{u}(0)}_4 = 2 \cdot \underbrace{\ddot{u}(c)}_{\substack{\text{al max è } \frac{\pi}{2}}} \quad \begin{matrix} \text{lungh.} \\ \text{interv.} \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{p.to unist} \\ \nearrow \end{matrix}$

Anche qui se la giochiamo $\frac{\pi}{2}$ e 2

Se avessi avuto

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \dot{u}(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 5 \end{cases} \rightsquigarrow L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + g\left(s + 3x + \frac{x^2}{2}\right) - s$$

Da qui avevo che $L(x, s, p) \geq \frac{1}{20} |s| - A$

e quindi da $F(w_m) \leq M$ potevo dedurre

$$\int_0^2 |w_m(x)| dx \leq M'$$

da cui $|w_m(x_m)| \leq M''$ e via con Ascoli-Arzelà.

$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ \dot{u}(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 5 \end{cases}$$

② Riadatto L_p : vorrei $L_p(x, s, p) = p - 3 - x$
perché ponendo

$L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) = 0$ per $x = 0, 2$
vergano le cond. richieste.

Quindi provo

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} (p - 3 - x)^2 + g(s)$$

Questa non va bene perché ELE diventa

$$(\dot{u} - 3 - x)^2 = \arctan u$$

$$\dot{u} - 1 = \arctan u$$

servirebbe $u = -1$ al RHS dove c'è L_s . Uso allora

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} (p - 3 - x)^2 + g(s) - s$$

Esempio di non unicità

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda \sin u \\ u(0) = \pi \\ u(\pi) = \pi \end{cases}$$

Una soluzione è evidente: $u(x) \equiv \pi$.

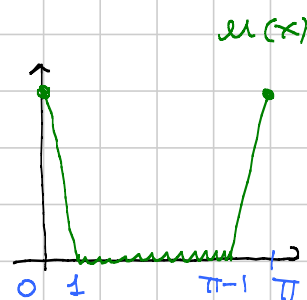
Dico che se λ è abbastanza grande positivo, allora non è unica

$$F(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \lambda \cos u \right) dx$$

Se λ è abbastanza grande, $u_0(x) \equiv \pi$ NON è il p.to di min. Infatti

$$F(u_0 \equiv \pi) = \int_0^\pi \lambda dx = \lambda\pi$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \int_{\pi-1}^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 \\ &\quad - \int_0^{\pi-1} \lambda \cos u - \int_{\pi-1}^1 \lambda \cos u \\ &\quad - \int_1 \lambda dx \end{aligned}$$



Questo cresce molto meno di $\lambda\pi$ per λ grande

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 19

Note Title

17/10/2019

CONVERGENZA DEBOLE IN L^p

Setting : $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura
 $\uparrow$ insieme $\uparrow$ σ -algebra $\uparrow$ misura ≥ 0 num. additiva
 (il valore $+\infty$ è ammesso)

Esempio modello : aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con la misura di Lebesgue

Def. (convergenza debole) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura e sia $p \in [1, +\infty]$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X)$ una succ. e sia $f_\infty \in L^p(X)$. Sia q l'esponente coniugato, cioè

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{con ovvio significato se } p = 1, +\infty)$$

Si dice che

$$\begin{array}{llll} f_n \rightarrow f_\infty & \text{in } L^p(X) & \text{se } p \in [1, +\infty) \\ f_n \xrightarrow{*} f_\infty & \text{in } L^\infty(X) & \text{se } p = +\infty \end{array}$$

$\uparrow$ ragione misteriosa

Se

$$\int_X f_n(x) g(x) d\mu \rightarrow \int_X f_\infty(x) g(x) d\mu \quad \forall g \in L^q(X)$$

Oss. Se $p=2$, allora $q=2$ ed è la sdita debole L^2 .

Brutalmente: convergenza debole = passare al limite nello scudo
 (duality pairing) tra L^p e L^q .

— o — o —

Caso speciale : $\mu(X) < +\infty$

Dati $p_1 < p_2$ abbiamo che $L^{p_1} \supseteq L^{p_2}$, cioè

$$f \in L^{p_2} \Rightarrow f \in L^{p_1}$$

In questo caso

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_2} \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_1}$$

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_2} \Rightarrow \int f_n g \rightarrow \int f_\infty g \text{ per ogni } g \in L^{q_2}$$

$$\Rightarrow \int f_n g \rightarrow \int f_\infty g \text{ per ogni } g \in L^{q_1} \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^{p_1}$$

↑
perché $q_1 > q_2$, equivali
 $L^{q_1} \subseteq L^{q_2}$

Morale: la convergenza debole L^1 è la più debole di tutte se $\mu(X) < +\infty$ (perché è quella che ha meno funzioni test).

— o — o —

Prop. Sia (X, m, μ) e sia p come nella definizione.

Sia $W \subseteq L^q(X)$ tale che $\text{Span } W$ è denso.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ sia LIMITATA in $L^p(X)$

(ii) esiste $f_\infty \in L^p(X)$ tale che

$$\int_X f_n(x) g(x) d\mu \rightarrow \int_X f_\infty(x) g(x) d\mu \quad \forall g \in W$$

Allora davvero $f_n \xrightarrow{(*)} f_\infty$ in $L^p(X)$.

Dim. Sia M t.c. $\|f_n\|_p \leq M$

Sia $g \in L^q(X)$ qualunque

$$\begin{aligned}
|\int f_n g - \int f_\infty g| &= |\int (f_n - f_\infty) g| \\
&\leq |\int (f_n - f_\infty) g_\varepsilon| + |\int (f_n - f_\infty) (g - g_\varepsilon)| \\
&\leq |\int (f_n - f_\infty) g_\varepsilon| + \|f_n\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} + \|f_\infty\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q}
\end{aligned}$$

Rigorosamente:

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo $g_\varepsilon \in \text{Span}(W)$ tale che

$$M \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \|f_\infty\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

(ci riesce per densità)

- ricevuto g_ε dal p.to prec., scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|\int (f_n - f_\infty) g_\varepsilon d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq n_0$$

(ci riesce per ipotesi visto che $g_\varepsilon \in \text{Span}(W)$)

- il conto sopra mi dice che

$$|\int (f_n - f_\infty) g d\mu| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

che è quello che voglio.

Altro modo di sistemare rigorosamente: dal conto di sopra, fisso $g_\varepsilon \in \text{Span } W$ a caso, e faccio il $\limsup$ a dx e sx

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\int (f_n - f_\infty) g d\mu| \leq \{M + \|f_\infty\|_{L^p}\} \|g - g_\varepsilon\|_{L^q}$$

Dal momento che questa vale per ogni $g_\varepsilon \in \text{Span}(W)$ ho che il $\limsup = 0$ e quindi 😊

— o — o —

Esempio 1

$$f_n(x) = \sin(mx)$$

Allora

$$f_n \rightarrow 0 \quad \text{in } L^p((0, \pi)) \quad \text{per ogni } p \in (1, +\infty]$$

Dim. Basta scontrarsi con le caratteristiche di intervalli, le quali sono dense in $L^q((0, \pi))$ per ogni $q < +\infty$

Teorema misterioso (Il mistero finisce nella 3ª parte del corso)

Sia (X, m, μ) spazio di misura, e sia $p \in (1, +\infty]$
↑ escluso

Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X)$ una successione LIMITATA.

Allora esiste $n_k \rightarrow +\infty$ succ. di naturali crescente, ed esiste $f_\infty \in L^p(X)$ tale che

$$f_{n_k} \xrightarrow{(*)} f_\infty \quad \text{in } L^p(X)$$

↑ aggiunto dopo video

Oss. Per $p=1$ non c'è nessuna speranza

Esempio In $L^p((-1, 1))$ consideriamo $f_n(x)$ come in figura.

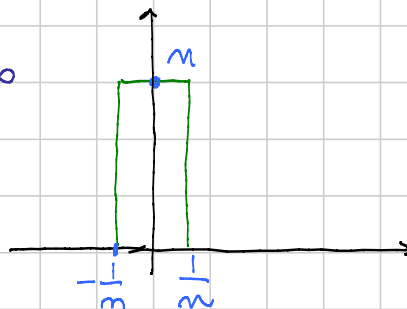
Queste sono limitate in $L^1((-1, 1))$,
 ma non negli L^p per $p > 1$.

Non può avere s.succ. che conv. debolmente in L^1 . Dovrebbe succedere che

$$\int_{-1}^1 f_n(x) g(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 f_\infty(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^\infty$$

e in particolare $\forall g \in C_c^\infty((-1, 1))$.

Ma



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n g(x) dx = 2g(0)$$

se g è continua. Ma allora dovrebbe essere

$$\int_{-1}^1 f_0(x) g(x) dx = 2g(0) \quad \forall g \in C^0$$

il che è impossibile (vedi lezione iniziale sui Sobolev).

Teorema (Per semplicità nel caso $\mu(X) < +\infty$)

[è limitata dal basso: dopo video]

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, e sia $f_n \rightarrow f_0$ debole in $L^1(X)$ (che è la più debole di tutte).

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_X \varphi(f_0(x)) d\mu.$$

Dim Supponiamo di sapere che $\varphi \in C^1$ e φ' è limitata. Allora la dim. è la solita 😊: partiamo da

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b$$

e scriviamo

$$\int_X \varphi(f_n(x)) d\mu = \int_X \varphi(f_0(x) + f_n(x) - f_0(x)) d\mu$$

$$\geq \int_X \varphi(f_0(x)) d\mu + \int_X \underbrace{\varphi'(f_0(x))}_{\in L^\infty(X)} \underbrace{(f_n(x) - f_0(x))}_{\rightarrow 0 \text{ debole } L^1} d\mu$$

Per il caso generale serve un Lemma.

Lemma Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora esiste una famiglia $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per $\varepsilon > 0$ t.c.

(i) ogni φ_ε è convessa, C^1 , con φ_ε' limitata (limitazione dipendente da ε)

(ii) $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(iii) fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $\varphi_\varepsilon(x)$ è deb. decresc. in ε .

Dim. teo., dato il Lemma Prendo le φ_ε , e per ogni $\varepsilon > 0$ osservo che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(f_n(x)) d\mu$$

Ma allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(f_0(x)) d\mu \quad \forall \varepsilon > 0$$

Concludo con Beppo-Levi facendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ RHS.

— o — o —



Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 20

Note Title

17/10/2019

[Prop.] Sia $\mu(X) < +\infty$. Sia $\{f_n\} \subset L^p(X)$ con $p \in [1, +\infty]$.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ limitata in $L^p(X)$

(ii) $f_n \rightarrow f_0$ debole $L^1(X)$ (la più debole di tutte)

Tesi: $f_0 \in L^p(X)$ e $f_n \rightarrow f_0$ debole L^p .

[Dim.] $\int_X |f_0(x)|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x)|^p d\mu < +\infty$
 ↑
 teorema sci con $\varphi(x) = |x|^p$
 ↑
 per ipotesi (i)
 truncamento +
 conv. dominata

Questo dimostra che $f_0 \in L^p$.

Ora basta osservare che $L^\infty(X)$ è denso in $L^q(X)$ e usare il fatto che la conv. deb. in L^p basta testarla su un denso di L^q .

— o — o —

Dim. teorema misterioso nel caso $\mu(X) < +\infty$ e $p \geq 2$

Sia $\{f_n\}$ limitata in $L^p(X)$. Poiché $p \geq 2$ e $\mu(X) < +\infty$, allora $\{f_n\}$ è limitata in $L^2(X)$.

Ma allora per teoria degli spazi di Hilbert esiste

$f_{n_k} \rightarrow f_0$ debole in $L^2(X)$
 quindi anche

$f_{n_k} \rightarrow f_0$ debole in $L^1(X)$

Per la Prop. precedente $f_{n_k} \rightarrow f_0$ debole in $L^p(X)$.
 — o — o —

Oss. Come puoi dimostrarlo in generale, seguendo l'idea Hilbertiana.

- Prendo un numerabile denso in $L^q(X)$ (abbastanza facile nei casi standard)
- Con procedimento diagonale ottengo f_{n_k} tale che

$$\int_X f_{n_k}(x) g(x) d\mu \rightarrow \underbrace{L(g)}_{\text{funzione misteriosa di } g} \quad \forall g \text{ denso}$$

- Osservo anche che L è lineare rispetto a g .
- Servirebbe un teo. misterioso che dica che

$$L(g) = \int_X f_0(x) g(x) d\mu$$

per una certa opportuna $f_0(x) \in L^p$. A quel p.to avrei finito (limit. + conv. deb. testata su un denso...)

Morale: serve un TEO. di RAPPRESENTAZIONE (3^a parte del corso).

— o — o —

METADISCORSO SUI TEOREMI DI COMPATTEZZA

I nemici della convergenza forte sono 3

① Fughe orizzontali : $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$



② Fughe verticali : $f_n(x) = n$

③ Oscillazioni furiose : $f_n(x) = \sin(nx)$

Teo. Ascoli - Arzelà (versione Analisi 2)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due sp. metrici.

Sia $f_n : X \rightarrow Y$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che

(i) X compatto (evita fughe orizz.)

(ii) per ogni $x \in X$ esiste $K \subseteq Y$ compatto (a priori dipende da x) tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{evita fughe vert.})$$

(iii) equicontinuità (evita oscillazioni furiose)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in B_X(x, \delta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(y) \in B_Y(f_n(x), \varepsilon)$$

$\uparrow$ non dipende da n

Allora esiste s.succ. che conv. unif.

I nemici della conv. debole sono solo le fughe verticali.

Teo standard: limitazione da qualche parte $\Rightarrow$ conv. debole in qualche senso.

Esempio $f_n(x) = 1_{[n, n+1]}$ converge debolmente da qualche parte? $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$

Dico che $f_n(x) \rightarrow 0$ debole in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p > 1$.

• Per $p=1$ non è vero perché dovrei scrivermi anche con $g(x) \equiv 1$ (che sta in $L^\infty(\mathbb{R})$)

• Per $p > 1$ ho $q < +\infty$ quindi serve che

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx \rightarrow 0$$

$\downarrow$
o puntuale dominato

[Dettagli aggiunti dopo video:]

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n g \right| \leq \int_n^{n+1} |g| \leq \int_n^{n+1} |g|^p \leq \left\{ \int_n^{n+1} |g|^p \right\}^{1/p}$$

$\uparrow$
Hölder

$\downarrow$
0
per conv. puntuale dominata]

Esercizio $\min \left\{ \int_0^2 (u^4 + \sin u) : u(0) = 3, u(2) = 7 \right\}$

1 Formulazione debole

Possibilità 1: in $W^{1,4}((0,2))$ così siamo a valori in $\mathbb{R}$

Possibilità 2: in $H^1((0,2))$ ammettendo il valore $+\infty$.

↓ (va bene anche con crescite più strane delle potenze)

2 Compattezza Da $F(u_n) \leq M$ ottengo $\|u_n\|_{L^4} \leq M'$

Possibilità 1: tes. mist. $\Rightarrow u_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$ debole L^4

Possibilità 2: $\|u_n\|_{L^4} \leq M' \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M''$ (misura finita)

$\Rightarrow u_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$ debole L^2

Al solito modo: $\|u_{n_k}\|_{L^4} \leq M' \Rightarrow \|u_{n_k}\|_{L^\infty} \leq M'''$
 $\uparrow$
 DBC

3 sci In ogni caso $u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty$ debole L^1
 e questo basta per concludere che

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^2 u_{n_k}(x)^4 dx \geq \int_0^2 u_\infty(x)^4 dx$$

Sulla parte di funzione segue dalla conv. unif.

Oss. Per fare compattezza basta assumere

$$L(x, s, p) \geq A |p|^\alpha - B |s|^\beta - C$$

$$A > 0$$

$$\alpha > 1$$

$$\beta < \alpha$$

4) Regolarità Sia u_0 p.to di min in H^1 o $W^{1,4}$

4.1 ELE debole come al solito $\forall v \in C_c^\infty$

$$\int_0^2 4u_0(x)^3 \tilde{v}(x) dx = - \int_0^2 \cos(u_0(x)) v(x) dx$$

da cui $(4u_0^3)' = \cos(u_0)$

4.2 Guaslagio le prime derivate

$$u_0 \in W^{1,4} \Rightarrow u_0 \in C^0 \Rightarrow \cos(u_0) \in C^0$$

$$\Rightarrow 4u_0^3 \in C^1 \Rightarrow \text{abbiamo un problema}$$

$$\text{Di sicuro } u_0^3 \in C^0 \xRightarrow{\substack{\uparrow \\ \sqrt[3]{x} \text{ è cont.}}} u_0 \in C^0 \Rightarrow u_0 \in C^1$$

Andiamo avanti

basta limitarlo

$$u_0 \in C^1 \Rightarrow \text{RHS} \in C^1 \xRightarrow{\uparrow} \text{RHS} \in \text{Lip} \Rightarrow u_0^3 \in \text{Lip}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0^3 \in \text{Lip} \\ u_0 \in C^0 \end{array} \right\} \xRightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{Analisi 1}}]{} u_0 \in \frac{1}{3}\text{-H\"older} \Rightarrow u_0 \in C^{1,1/3}$$

Più avanti di così non si può.

$$(4u_0^3)' = \cos u_0 \rightsquigarrow 12 u_0^2 u_0' = \cos u_0$$

$\uparrow$
Dove si annulla,
possiamo essere
guai per u_0

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 21

Note Title

21/10/2019

IDENTITÀ (o Legge) DEL PARALLELOGRAMMO

Sia H sp. di Hilbert. Allora per ogni x e y in H vale

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

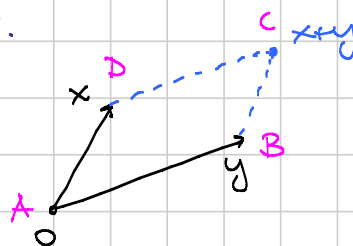
ci sono solo
norme

Dim Espando e semplifico i doppi prodotti.

Interpr. geometrica

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

somma lung. diagonali = somma lung. lati

Teorema (Jordan - Frechet - von Neumann)

Se in uno spazio normato vale la Legge del parallelogrammo, allora la norma deriva da un prod. scalare dato dalla formula

$$p(x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

IDENTITÀ DI
POLARIZZAZIONE

In particolare: Banach + parallelogrammo $\Rightarrow$ Hilbert

Dim. [Provare a fare la dim. da soli]

Devo verificare che la $p(x, y)$ ha le proprietà del prod. scalare.

Step 0 Ovvietà

$$p(x, y) = p(y, x)$$

$$p(x, 0) = 0$$

$$p(x, x) = \|x\|^2$$

$$p(-x, y) = -p(x, y)$$

Step 1 $p(2x, y+z)$

$$\begin{aligned} p(2x, y+z) &= \frac{1}{4} (\|2x+y+z\|^2 - \|2x-y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|(x+y)+(x+z)\|^2 - \|(x-y)+(x-z)\|^2) \end{aligned}$$

uso 2 volte
parall.

$$= \frac{1}{4} (2\|x+y\|^2 + 2\|x+z\|^2 - \|y-z\|^2 - 2\|x-y\|^2 - 2\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2)$$

$$= 2p(x, y) + 2p(x, z)$$

[Ho ottenuto l'additività con dei 2 in giro]

Step 2 Uso rel. prec. con $z=0$ e ottengo, grazie a $p(x, 0)=0$,

$$p(2x, y) = 2p(x, y)$$

e quindi anche

$$p(2x, y+z) = 2p(x, y+z)$$

Ma allora

$$2p(x, y+z) = p(2x, y+z) = 2p(x, y) + 2p(x, z)$$

e semplificando ho l'additività.

Step 3 Devo dim. che $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$

- vero per $\lambda = 0, 1, 2$
- vero per $\lambda \in \mathbb{N}$ (additività + induzione)
- vero per $\lambda \in \mathbb{Z}$ (posso portare il segno - fuori)

- vero per $\lambda \in \mathbb{Q}$ perché se $\lambda = \frac{m}{n}$, allora

$$m p\left(\frac{m}{n}x, y\right) = p(mx, y) = m p(x, y)$$

$\uparrow$ m dentro $\uparrow$ m fuori

Divido per m ed è ok.

- Occorre conquistare $\mathbb{R}$. Considero, fissati x e y , le due funzioni

$$\lambda \rightarrow \lambda p(x, y)$$

$$\lambda \rightarrow p(\lambda x, y)$$

Coincidono in $\mathbb{Q}$. Se fossero continue...

La prima è banalmente continua. La seconda è

$$p(\lambda x, y) = (\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2) \cdot \frac{1}{4}$$

Basta dim. che $\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|^2$ è continua (l'altra idem)

$$\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|$$

e questo segue da

$$|\|\lambda_1 x + y\| - \|\lambda_2 x + y\|| \leq \|(\lambda_1 - \lambda_2)x\| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x\|$$

per ogni λ_1 e λ_2 in $\mathbb{R}$, da cui la tesi.

PROIEZIONE SU UN CONVESSO CHIUSO

Setting:

- H spazio di Hilbert
- $K \subseteq H$ sottosistema convesso e chiuso (forte)
- $x_0 \in H$ pto dato.

Risolvere

$$\min \{ \text{dist}(x_0, y) : y \in K \}$$

$\|x_0 - y\|$

Teorema Siano H e K come sopra

- (1) Esistenza Per ogni $x_0 \in H$ esiste il minimo di sopra
- (2) Unicità Per ogni $x_0 \in H$ esiste un unico p.to di min. $y_0 \in K$.
D'ora in poi

$$y_0 =: P_K(x_0)$$

↑ proiezione di x_0 su K

- (3) Caratterizzazione $P_K(x_0)$ è l'unico p.to $y_0 \in K$ tale che

$$\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

- (4) 1-lipschitzianità Vale che P_K è 1-lip., cioè

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall (x_1, x_2) \in H^2$$

Interpr. geom. della (3) L'angolo tra $x_0 - y_0$ e $y - y_0$ è sempre ottuso.

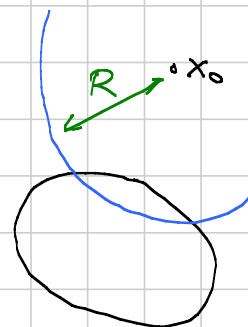
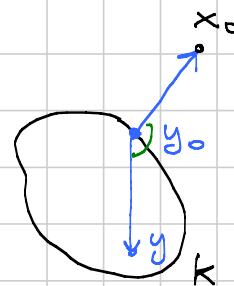
Dim (o) Esistenza nel caso finito dimensionale

Prendo una palla centrata in x_0 e abbastanza grande da intersecare K : sia $\bar{B}(x_0, R)$
↑ chiusa

La battaglia per il min si gioca su $K \cap \bar{B}(x_0, R)$, che è chiuso + lim. e quindi compatto

(basta che K sia chiuso)

Ora non ho + le palle compatte.



(1) Esistenza Pongo $I = \sup \{ \|x_0 - y\| : y \in K \}$
 e prendo $\{y_n\}$ una succ. infinita.
 Spero sia di Cauchy che così converge

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x_0) - (y_m - x_0)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - \|y_n + y_m - 2x_0\|^2 \\ &= 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\left\| \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in K} - x_0 \right\|^2 \end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora, se n ed m sono abbastanza grandi

$$\|y_n - x_0\|^2 \leq I + \varepsilon \qquad \|y_m - x_0\|^2 \leq I + \varepsilon$$

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x_0 \right\|^2 \geq I \quad (\text{questo sempre})$$

e quindi

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(I + \varepsilon) + 2(I + \varepsilon) - 4I = 4\varepsilon$$

e questo dimostra che $\{y_n\}$ è di Cauchy e $y_n \rightarrow y_\infty \in K$
 per chiusura

(2) Unicità Due div.

• Supponiamo per assurdo che y_1 e y_2 siano 2 p.ti di un'U.
 Allora $y_1, y_2, y_1, y_2, y_1, y_2, \dots$
 è succ. infinita, dunque di Cauchy per p.to prec.

• Conto precedente con y_1, y_2 e $\varepsilon = 0$ produce

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0.$$

(3) Caratterizzazione

Ci sono due cose da dimostrare

- Se y_0 è p.to di min., allora verifica la caratterizzazione.

Prendo $y \in K$ qualunque e osservo che

$$ty + (1-t)y_0 \in K \quad \forall t \in [0,1]$$

dunque

$$\begin{aligned} \cancel{\|x_0 - y_0\|^2} &\leq \|x_0 - ty - (1-t)y_0\|^2 \\ &= \|(x_0 - y_0) - t(y - y_0)\|^2 \\ &= \cancel{\|x_0 - y_0\|^2} - 2t \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle + t^2 \|y - y_0\|^2 \end{aligned}$$

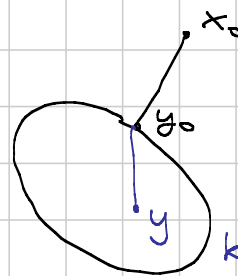
$$2t \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq t^2 \|y - y_0\|^2 \quad (t > 0)$$

Facendo $t \rightarrow 0$ ho la tesi.

- Se y_0 verifica la caratt., allora è p.to di min.
Prendo un altro $y \in K$ vale

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\|^2 &= \|x_0 - y_0 + y_0 - y\|^2 \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + \underbrace{2 \langle x_0 - y_0, y_0 - y \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\|y_0 - y\|^2}_{\geq 0} \\ &\quad \text{(ipotesi con seguito -)} \\ &\geq \|x_0 - y_0\|^2 \end{aligned}$$

con uguaglianza se e solo se $y_0 = y$.



(4) Lipschitzianità Siano $x_1 \in H$ e $x_2 \in H$

$$\begin{aligned} \langle x_1 - P_k x_1, y - P_k x_1 \rangle &\leq 0 & \forall y \in K \\ \langle x_2 - P_k x_2, y - P_k x_2 \rangle &\leq 0 & \forall y \in K \end{aligned}$$

$$\langle x_1 - P_k x_1, P_k x_2 - P_k x_1 \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\langle x_2 - P_k x_2, P_k x_1 - P_k x_2 \rangle \leq 0 \quad (2)$$

$$\langle P_k x_2 - x_2, P_k x_2 - P_k x_1 \rangle \leq 0 \quad (3)$$

↑ stessa

Sommo (1) + (3) e ottengo

$$\langle (x_1 - x_2) - (P_k x_1 - P_k x_2), P_k x_2 - P_k x_1 \rangle \leq 0$$

Espando

$$\|P_k x_2 - P_k x_1\|^2 \leq - \langle x_1 - x_2, P_k x_2 - P_k x_1 \rangle$$

$$\leq \|x_1 - x_2\| \cdot \|P_k x_2 - P_k x_1\|$$

Se posso semplifico, se non posso ancora meglio.

— 0 — 0 —

Ist. Analisi Matematica

- LEZIONE 22

Note Title

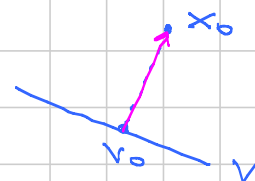
21/10/2019

PROIEZIONE SU SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHIUSOSetting: H sp. di Hilbert V sotto sp. vettoriale CHIUSOOss. In dim. infinita esistono s.sp. vett. non chiusi, ad esempio lo Span di una base ortonormale V è convesso, quindi la teoria precedente si applica, dunque $P_V: H \rightarrow V$ è ben definitaTeorema Siano H, V e P_V come sopra.

Allora valgono i seguenti fatti

- (1)
- Caratterizzazione più forte
- . Per ogni
- $x_0 \in H$
- si ha che
- $P_V x_0$
- è l'unico vettore
- $v_0 \in V$
- tale che

$$\langle x_0 - v_0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$



- (2)
- $P_V: H \rightarrow V$
- è lineare (Linearità)

- (3) Il ker di
- P_V
- è un sottospazio
- W
- chiuso di
- H
- e vale

$$H = V \oplus W$$

$$W = V^\perp$$

(Somma diretta ortogonale)

Dim. Dalla caratt. generale sappiamo che

$$\langle x_0 - v_0, y - v_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in V$$

La uso con $y = \underbrace{v+v_0}_{\in V}$ e $y = \underbrace{-v+v_0}_{\in V}$ con $v \in V$

$\langle x_0 - v_0, v \rangle \leq 0$ $\langle x_0 - v_0, -v \rangle \leq 0$
quindi è nullo.

(2) Linearità • Devo dim. che $P_V(x_1 + x_2) = P_V x_1 + P_V x_2$

Chi è $P_V(x_1 + x_2)$? È l'unico vettore $v_0 \in V$ tale che

$$\langle x_1 + x_2 - v_0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Io conosco un v_0 con questa proprietà, cioè $P_V x_1 + P_V x_2$:

$$\langle x_1 + x_2 - P_V x_1 - P_V x_2, v \rangle = \underbrace{\langle x_1 - P_V x_1, v \rangle}_0 + \underbrace{\langle x_2 - P_V x_2, v \rangle}_0$$

Ma allora la tesi

per ipotesi

• Devo dim. che $P_V(\lambda x_0) = \lambda P_V(x_0)$ e anche questo lo faccio via caratterizzazione

(3) Somma diretta ortogonale

$$W = \ker(P_V) = \{x \in H : P_V x = 0\}$$

(caratt.) $= \{x \in H : \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\} = V^\perp$
Verifica che

• W è chiuso: controimmagine di 0 rispetto a funzione continua (1-lip)

• W è s.sp. vettoriale: ovvio (geom. 1)

• $V \cap W = \{0\}$: chi sta nell' $\cap$ è $\perp$ a se stesso

• Ogni $x \in H$ si scrive come $x = \underbrace{v}_V + \underbrace{w}_W$

Basta porre $v := P_V x$ e $w = x - P_V x$
 $\in V$

e osservare che $w \in V^\perp$ in quanto dalla caratt. segue che

$$\langle \underbrace{x - P_V x}_w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

— o — o —

Osservazioni

① Potrei dimostrare la parte di esistenza della proiezione sul convesso usando compattezza debole delle palle + SCI della norma.

Però deriva

- La separabilità (che invece non abbiamo usato)
- La compattezza di $K \cap \overline{B}(x_0, R)$

② Se $K = \overline{B}(0, 1)$, allora

$$P_K(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{se } \|x\| > 1 \end{cases}$$

Dim. verificare la caratterizz. (il 1° caso è banale)

$$\langle x - \frac{x}{\|x\|}, y - \frac{x}{\|x\|} \rangle \stackrel{?}{\leq} 0 \quad \forall y \in \overline{B}(0, 1)$$

$$\langle x, y \rangle - \|x\| - \langle x, y \rangle \frac{1}{\|x\|} + 1 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$\langle x, y \rangle \frac{\cancel{\|x\|} - 1}{\|x\|} \stackrel{?}{\leq} \frac{\cancel{\|x\|} - 1}{\cancel{\|x\|}}, \quad \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \|x\|$$

perché $\|x\| > 1$ $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|x\|$ 😊

CONNESSO + STRONG $\Rightarrow$ WEAK

Teorema 1 Sia H uno sp. di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso (forte).

Allora K è chiuso debole, cioè se $\{y_n\} \subseteq K$ e $y_n \rightarrow y_\infty$ allora $y_\infty \in K$.

Teorema 2 Sia H uno sp. di Hilbert, e sia $F: H \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(1) F è SCI forte, cioè

$$y_n \rightarrow y_\infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(y_n) \geq F(y_\infty)$$

(2) F è CONNESSA.

Allora F è SCI debole, cioè

$$y_n \rightarrow y_\infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(y_n) \geq F(y_\infty)$$

Teorema 0 (Separazione forte punto-convesso)

H sp. di Hilbert, $K \subseteq H$ convesso chiuso.

Allora esistono $u \in H$ e due numeri reali $\delta_2 > \delta_1$ tale che

$$\langle x_0, u \rangle = \delta_2 > \delta_1 \geq \langle y, u \rangle \quad \forall y \in K$$

Dim. Guardando la figura pougo

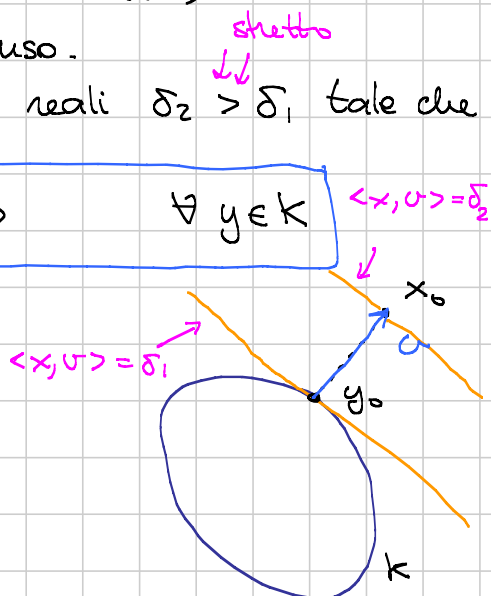
$$u := x_0 - P_K x_0$$

$$\delta_2 := \langle x_0 - P_K x_0, x_0 \rangle$$

$$\delta_1 := \langle x_0 - P_K x_0, P_K x_0 \rangle$$

Osservo che

$$\delta_2 - \delta_1 = \|x_0 - P_K x_0\|^2$$



Bisogna dim. che $\delta_1 \geq \langle y, x_0 - P_K x_0 \rangle \quad \forall y \in K$
 cioè

$$\langle x_0 - P_K x_0, P_K x_0 \rangle \stackrel{?}{\geq} \langle y, x_0 - P_K x_0 \rangle$$

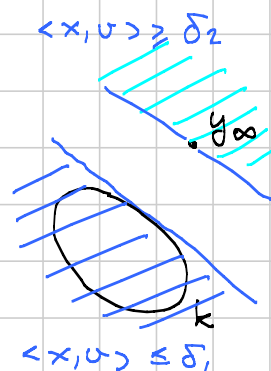
cioè

$$\langle y - P_K x_0, x_0 - P_K x_0 \rangle \leq 0$$

che è il solito angolo ottuso.
 — o — o —

Dim. teo. 1 Sia $y_m \in K$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
 Supponiamo che $y_m \rightarrow y_\infty$
 Vogliamo dim. che $y_\infty \in K$.

Supponiamo per assurdo che $y_\infty \notin K$. Ma
 allora per separazione strong esiste $v \in H$
 tale che



$$\langle v, y_\infty \rangle = \delta_2 > \delta_1 \geq \underbrace{\langle v, y_m \rangle}_{\downarrow \langle v, y_\infty \rangle} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Dim. Teorema 2 Sia $y_m \rightarrow y_\infty$ debole. Voglio dim. che

$$l = \liminf F(y_m) \geq F(y_\infty)$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ considero

$$K_\varepsilon := \{x \in H : F(x) \leq l + \varepsilon\}$$

Allora

- K_ε è chiuso forte perché F è scf forte
- K_ε è convesso perché F è convessa

Ora $y_m \in K_\varepsilon$ per infiniti indici, diciamo su una s.succ., quindi $y_\infty \in K_\varepsilon$.

Da questo segue che

$$F(y_\infty) \leq L + \varepsilon$$

Visto che $\varepsilon > 0$ è arbitrario abbiamo la tesi.

[Per precisione dovrei trattare a parte, nello stesso modo, il caso $L = -\infty$, scoprendo a posteriori che non si può]
—o —o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 23

Note Title

22/10/2019

MULTIPLICATORI DI LAGRANGE

Analisi 2 Siano $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo

$$K_G := \{x \in \mathbb{R}^d : G(x) = 0\}$$

Teorema Supponiamo che $x_0 \in K_G$ sia un p.to di min./max per F ristretta a K_G , cioè

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \forall x \in K_G.$$

Se F e G sono abbastanza regolari (diciamo C^1 in $\mathbb{R}^d$ o in un intorno di x_0), allora vale ALMENO una delle seguenti due possibilità

- (i) $\nabla G(x_0) = 0$
- (ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$, cioè x_0 è p.to stazionario per $F - \lambda G$.

Almeno 3 strategie di dimostrazione:

- via teo. funzioni implicite
- via teo. mappa aperta
- via penalizzazione del vincolo

} (vedi Ser. Analisi 2)

— o — o —

Setting : X sp. affine con V sp. vett. di riferimento

$$F: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad G: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$K_G := \{x \in X : G(x) = 0\}$$

$$\min \{ F(x) : x \in K_G \}$$

Teorema Setting come sopra.

Sia u_0 un p.to di min (per F rispetto a K_G).

Supponiamo che le funzioni

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \rightarrow F(u + tv + sw) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \rightarrow G(u + tv + sw) \in \mathbb{R}$$

siano di classe C^2 per ogni $u \in X$, $v \in V$, $w \in V$.

(Basta in realtà in un intorno di $(0,0)$)

Allora vale ALMENO una delle seguenti 2 possibilità:

(i) $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \quad \forall v \in V$$

↑ non dipende da v

cioè $\delta(F - \lambda G)(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$.

Dim. via teo. funz. implicite

Supponiamo (i) falsa, quindi esiste $w \in V$ t.c. $\delta G(u_0, w) \neq 0$.

Per ogni $v \in V$ considero

$$g(t, s) := G(u_0 + tv + sw)$$

Osservo che $g(0,0) = G(u_0) = 0$ e $g_s(0,0) = \delta G(u_0, w) \neq 0$

Teo. funz. impl. $\Rightarrow \exists \delta: (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g(t, \delta(t)) \equiv 0$
cioè

$$G(u_0 + tv + \delta(t)w) = 0 \quad \forall t \in (-\delta_0, \delta_0)$$

$\in K_G$, quindi è un competitor
per il minimo

Pongo

$$\varphi(t) := F(u_0 + tv + \delta(t)w)$$

e osservo che ha minimo per $t=0$, quindi $\varphi'(0)=0$.
D'altra parte

$$\varphi'(0) = \delta F(u_0, v) + \delta F(u_0, w) \dot{\gamma}(0)$$

$$\text{Ora } \dot{\gamma}(0) = - \frac{g_t(0,0)}{g_s(0,0)} = - \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, w)}$$

da cui

$$\delta F(u_0, v) - \frac{\delta F(u_0, w)}{\delta G(u_0, w)} \delta G(u_0, v) = 0$$

" λ che non dipende da v "
— o — o —

Esercizio • Riadattare la dim. via teo. mappa aperta
• Generalizzare a più moltiplicatori
— o — o —

L'ESEMPIO

$$\min \left\{ \int_0^\pi u(x)^2 dx : u(0)=u(\pi)=0, \int_0^\pi u(x)^2 dx = 1 \right\}$$

Esistenza via metodo diretto

- ① Form. debole: tutto ha senso in H^1
- ② Compattezza: da $F(u_n) \leq M$ deduco $\|u_n\|_{L^2} \leq M$
quindi $u_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$

Dalle DBC + Hölderianità ottengo $\|u_n\|_{L^\infty} \leq M'$
Ascoli - Arzelà e il solito "doppio scambio" danno

$$\begin{aligned} u_{n_{k_i}} &\rightarrow u_\infty \\ u_{n_{k_i}} &\rightarrow u_\infty \text{ unif.} \end{aligned}$$

Osserviamo che u_∞ soddisfa DBC + vincolo integrale
(che passa al limite per conv. unif.)

③ SCI : banale sul funzionale

Questo completa l'esistenza.

Cosa risolve il minimo

Voglio applicare i moltiplicatori anche in H^1 con

$$F(u) = \int_0^\pi u^2 dx$$

$$G(u) = \int_0^\pi u^2 dx - 1$$

Ci sono 2 possibilità

$$\bullet \delta G(u_0, v) = 0 \rightsquigarrow \left. \frac{d}{dt} G(u_0 + tv) \right|_{t=0} = 0$$

$$\int_0^\pi u(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$$

$\Rightarrow u \equiv 0$ e non soddisfa il vincolo

$$\bullet \delta [F - \lambda G](u_0, v) = 0 \rightsquigarrow \dots$$

$$\int_0^\pi [u(x) v(x) - \lambda u(x) v(x)] dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((0, \pi))$$

$$\text{Al solito modo} \quad \int_0^\pi u(x) v(x) dx = \int_0^\pi \lambda u(x) v(x) dx$$

$$(u)' = -\lambda u$$

Al solito modo scopro che $u \in C^2$ e risolve

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = -\lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \\ \int_0^\pi u^2 = 1 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{tre condizioni, ma anche} \\ \text{3 parametri liberi} \end{array} \right\}$$

Determino segno di λ moltiplicando per u :

$$u\ddot{u} = -\lambda u^2$$

Integro:

$$-\lambda \underbrace{\int_0^\pi u^2(x) dx}_1 = \int_0^\pi u(x) \ddot{u}(x) dx = - \int_0^\pi \underbrace{\dot{u}(x)^2 dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{per parti} \\ \text{e i bordi se u e va}}}$$

Deslucio che $\lambda > 0$, quindi

$$u(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x) + b \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

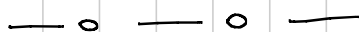
Dalle DBC scopro che $b=0$ e $\sqrt{\lambda}=k$, quindi

$$u(x) = a \sin(kx)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ e a in maniera tale da aggiustare l'integrale, quindi ho infiniti p.ti che soddisfanno il sistema. Facendo il conto si scopre che il p.to di minimo è

$$u_0(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$$

e il valore minimo è 1.



Abbiamo così dimostrato che

Disug. alla Pólya

$$\int_0^\pi \dot{u}(x)^2 dx \geq \int_0^\pi u(x)^2 dx \quad \forall u \in H^1((0, \pi))$$

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

Dim È omogenea, quindi WLOG posso assumere RHS = 1

Un risultato analogo, con costante $\neq 1$, vale su ogni intervallo.

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^\pi \{ 3u'^2 - 2u^2 + \sin u \} : u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

Con il metodo diretto arriviamo alla compattezza. Una volta deriva

$$L(x, s, p) \geq Ap^2 - B|s|^\alpha - C \quad \text{con } A > 0 \text{ e } \alpha < 2$$

Ma ora $\alpha = 2$ 😞

Però grazie a Pólya sappiamo che $\int_0^\pi u'^2 \geq \int_0^\pi u^2$ e quindi

$$F(u) \geq \int_0^\pi (u'^2 + \sin u) dx$$

Quindi da $F(u) \leq M$ posso dedurre $\|u\|_{L^2} \leq M'$ e poi è storia.

Oss. $\sup \left\{ \int_0^\pi 2u'^2 - 3u^2 + \sin u : u(0) = u(\pi) = 0 \right\} = -\infty$

Una successione infinita è $u_n(x) = n \sin x$ per cui

$$F(u_n) \sim -n^2 \cdot \text{cost.} \rightarrow -\infty$$

— 0 — 0 —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 24

Titolo nota

22/10/2019

Esercizio 1

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(u'^2 + \frac{1}{u^2} \right) dx : u(0)=3 \quad u(2)=1 \right\}$$

① Formulazione debole : ok in H^1 , ma occorre ammettere $+\infty$ tra i possibili valori

② Compattezza Supposto $F(u_n) \leq M$

- subito si ottiene $\|u_n'\|_{L^2} \leq M'$
- dalle DBC si ottiene $\|u_n\|_{L^\infty} \leq M''$

Al solito modo, a meno di s.succ., $u_n \rightarrow u_\infty$ unif.
 $u_n' \rightarrow u_\infty'$

③ SCI • sulla derivata è la solita SCI della norma
 • sulla funzione non è banale analisi 2, perché l'integrale può essere improprio: $L(x,s,p)$ non è continua in s.

L'idea è usare FATOU : sia $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., allora

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_n(x)^2} dx &\geq \int_0^2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n(x)^2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{u_\infty(x)^2} dx \end{aligned}$$

Oss. Basta la convergenza $u_n \rightarrow u_\infty$ forte in qualche L^p

Dim. Sia $I = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_n^2} dx$

Sia u_{m_k} la sotto-succ. che realizza il liminf

$$l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_k}^2} dx$$

Ora $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ L^p forte, quindi esiste

$u_{m_{k_i}} \rightarrow u_\infty$ puntualmente q.o.

Ora

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_m^2} dx &\stackrel{\text{def. l}}{=} l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_k}^2} dx \\ &\stackrel{\text{banalità}}{=} \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_{k_i}}^2} dx \\ &\stackrel{\text{s. succ. sui lim.}}{\geq} \int_0^2 \liminf_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{m_{k_i}}(x)^2} dx \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_0^2 \liminf_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{m_{k_i}}(x)^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{u_\infty(x)^2} dx$$

Fatou

conv. punt. q.o.

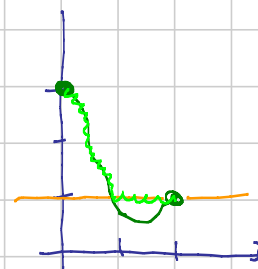
[Aggiunto dopo video:
servirebbe un altro
passaggio in cui il
liminf diventa lim]

- ④ Per fare ELE dovrei calcolare $F(u+t v)$, ma ci possono essere problemi se u si annulla (potrebbe venire $+\infty$ per ogni $t \neq 0$).

Se dimostrassi che $u_0(x) \geq m > 0$, allora sarebbe tutto ok. Per questo c'è l'argomento di troncamento. Dico che

$$u_0(x) \geq 1 \text{ per ogni } x \in [0, 2]$$

[Se andasse sotto, prendo il 1° attraversamento e prolungo costante finché non torna sopra: guadagno da due parti].



Potevo da subito restringermi alle $u \geq 1$ sempre.

Esempio 2 $u'' = u^3 + \sin t$

Voglio dimostrare che esiste $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ periodica che la risolve, e magari pure che è unica.

Oss. Il termine u^3 fa paura perché le soluz. possono avere blow up. Non è garantita l'esistenza globale !!

Approccio variazionale Scrivo x invece di t :

$$u'' = u^3 + \sin x$$

e considero il problema di min

$$\min \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{4} u^4 + \sin x \cdot u \right) dx : u(0) = u(2\pi) \right\}$$

Dimostro esistenza e unicità del minimo con metodo diretto

② Compattezza Sia $F(u_n) \leq M$

$$\bullet L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \underbrace{\frac{1}{4} s^4 - |s|}_{\text{limit. dal basso}} \geq \frac{1}{2} p^2 - A$$

$\Rightarrow$ Limitatezza sulle derivate

$$\bullet L(x, s, p) \geq \frac{1}{4} s^4 - |s| \geq \frac{1}{8} s^4 - B$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} u_n(x)^4 dx \leq M' \Rightarrow |u_n(x_n)| \leq M''$$

e grazie all' Hölderianità equi ottengo

$$|u_n(x)| \leq M''' \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

③ SCI : standard

p.to di cui

④ Regolarità : in modo standard arrivo a $u_0 \in C^2([0, 2\pi])$
e risolve

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 = u_0^3 + \sin x \\ u_0(0) = u_0(2\pi) \\ \dot{u}_0(0) = \dot{u}_0(2\pi) \end{cases} \rightarrow \text{nascosto su the road}$$

⑤ Unicità : per il p.b.m. variazionale segue in modo standard dalla convessità di $L(x, s, p)$ nella coppia (s, p)
[fine il conto!]

— o — o —

Estendo $u_0(x)$ a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità.

Osservo che si ricolla C^1 , anzi C^2 , perchè $\dot{u}_0(x)$ per $x=0$ e $x=2\pi$ li ricavo dall'eq.

Osservo che l'estesa risolve l'equazione ovunque.

Basta verificarlo in ogni intervallo $[2k\pi, (2k+2)\pi]$. Ad esempio in $[2\pi, 4\pi]$ l'estesa $v(x)$ è $v(x) = u_0(x - 2\pi)$ e questa risolve

$$\begin{aligned} \ddot{v}(x) &= \ddot{u}_0(x - 2\pi) = u_0(x - 2\pi)^3 + \sin(x - 2\pi) \\ &= v(x)^3 + \sin x \quad \forall x \in [2\pi, 4\pi] \end{aligned}$$

Osservo anche che arrivo a C^0 per bootstrap
— o — o —

Resta da dimostrare che non esistono soluzioni con periodi strani

- Non esistono sol. T -periodiche con $T \neq 2k\pi$:
 $\sin x = \ddot{u}(x) - u^3(x)$ sarebbe T -periodico !!

- Come escludo soluzioni di periodo 8π ?
 - Considero una sol. di periodo 8π
 - Dimostro che è p.to di min. per il pbm. variazionale in $[0, 8\pi]$
 - Dimostro che risolve ELE e che il min in $[0, 8\pi]$ è unico (convessità)
 - Dimostro che ogni sol. di ELE sarebbe p.to di min.
 - Una sol. di ELE in $[0, 8\pi]$ l'ho conosciuta già, ed è quella in $[0, 2\pi]$ ripetuta.

Esempio 3

$$F(u) = \int_a^b (5 + \sin x) u^6 dx$$

Se $u_m \rightarrow u_\infty$ posso garantire la SCI?

Detto altrimenti:

$$u_m \xrightarrow{\text{da qualche parte}} u_\infty \Rightarrow \liminf \int_a^b (5 + \sin x) u_m^6 \geq \int_a^b (\dots) u_\infty^6 ?$$

Risposta: SI e ci sono due strategie

- elementare via convessità $\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b$

$$\int_a^b (5 + \sin x) \underbrace{\left(\overset{a}{\uparrow} u_\infty + \overbrace{u_m - u_\infty}^b \right)^6}_{\varphi(a+b)} dx \geq \dots$$

qui può tornare utile approx. con φ_ε con derivata limitata.

- Dimostrare che F è convesso (quasi ovvio) + SCI forte (dove? in L^6 è praticamente banale in L^2 o L^1 segue da Fortin come in esempio precedente).