

BAIRE POINT 10**Teorema** (Limite puntuale di funz. continue)

Siano X sp. di Baire, Y sp. metrico, $f_n: X \rightarrow Y$ continue, $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ per ogni $x \in X$.

Allora l'insieme dei p.ti di discontinuità di f_∞ è un F_σ con parte interna vuota.

Dim Che sia un F_σ è un fatto generale in quanto

$$\{\text{disc di } f_\infty(x)\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon = \bigcup_{k \geq 1} D_{1/k}$$

dove

$$D_\varepsilon := \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{chiuso} \end{array} \begin{array}{l} \forall \text{ intorno } \mathcal{U} \text{ di } x \text{ esistono } (y, z) \in \mathcal{U}^2 \\ \text{t.c. } d_Y(f(y), f(z)) \geq \varepsilon \end{array} \right\}$$

Claim: i D_ε hanno tutti parte interna $\emptyset$.

Supponiamo per assurdo che

$$A_0 \subset D_{\varepsilon_0}$$

$\uparrow$
aperto $\neq \emptyset$

Allora ogni sottoaperto di A_0 contiene 2 p.ti con immagini a distanza $\geq \varepsilon_0$. Dim. che non è vero. Poniamo

$$C_k := \left\{ x \in A_0 : d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall n \geq k \quad \forall m \geq k \right\}$$

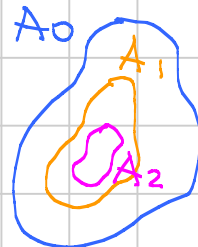
$\uparrow$
sp. di Baire

I C_k sono chiusi e la loro unione è A_0 . Quindi esiste

$$A_1 \subseteq C_{k_1}$$

↑
aperto $\neq \emptyset$

$$A_1 \subseteq A_0$$



Poiché f_{k_1} è continua esiste $A_2 \subseteq A_1$ aperto t.c.

$$d_Y(f_{k_1}(y), f_{k_1}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall (y, z) \in A_2$$

Dico che in A_2 non esiste una coppia di p.ti con immagini a distanza $\geq \varepsilon_0$. Infatti

$$d_Y(f_\infty(y), f_\infty(z)) \leq d_Y(f_\infty(y), f_{k_1}(y)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad y \in A_1$$

$$+ d_Y(f_{k_1}(y), f_{k_1}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \text{se } y, z \in A_2$$

$$+ d_Y(f_{k_1}(z), f_\infty(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad z \in A_1$$

Nella prima e terza riga ho passato al limite la def. di C_{k_1} , cioè

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall m \geq k_1 \quad \forall n \geq k_1$$

↓ $m \rightarrow +\infty$

$$d_Y(f_m(x), f_\infty(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall m \geq k_1$$

— 0 — 0 —

Corollario Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ovunque.

Allora esiste almeno un p.to (anzi un G_δ denso di p.ti) in cui $f'(x)$ è continua.

Dim. Basta osservare che

$$f'(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{f(x + \frac{1}{m}) - f(x)}{\frac{1}{m}}}_{\text{— 0 — 0 —}} \quad \varphi_m(x) \text{ che conv. puntualmente.}$$

BAIRE POINT 11

Teorema della mappa aperta e di intorno

Prop 1 Siano X e Y insiemi, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Allora sono equiv. i seguenti fatti.

(i) f è surgettiva

(ii) per ogni $y \in Y$, esiste $x \in X$ t.c. $f(x) = y$

(iii) esiste un solver $S: Y \rightarrow X$ tale che

$$f(S(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

↑ inversa destra

Dim. : 1ª settimana del primo anno, modulo CA.

Prop 2 Siano X e Y sp. normati, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare.

Allora sono equiv. i seguenti fatti.

(i) f è aperta, cioè per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha $f(A)$ è aperto in Y .

(ii) esiste $R > 0$ t.c. $f(B_X(0, R)) \supseteq B_Y(0, 1)$.

(iii) esiste un solver quantitativo, cioè esistono $M \in \mathbb{R}$ e $S: Y \rightarrow X$ tale che

$$f(S(y)) = y \quad \forall y \in Y \quad \|S(y)\|_X \leq M \|y\|_Y \quad \forall y \in Y$$

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) Consideriamo $f(B_X(0, 1))$: deve essere aperto in Y , quindi deve contenere intorno di $f(0) = 0$.
Quindi

$$f(B_X(0, 1)) \supseteq B_Y(0, \delta_0)$$

Prendo $R = \frac{1}{\delta_0}$ e per linearità

$$\begin{aligned} f(B_X(0, \tfrac{1}{\delta_0})) &= f(\tfrac{1}{\delta_0} B_X(0, 1)) = \tfrac{1}{\delta_0} f(B_X(0, 1)) \\ &\supseteq B_Y(0, 1) \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si tratta di passare da 0 ad un p.to generico

Sia $A \subseteq X$ aperto qualunque. Devo dim. che $f(A)$ è aperto
Prendo $x_0 \in A$ e prendo

$$B_X(x_0, r_0) \subseteq A$$

Dico che esiste $r_1 > 0$ t.c.

$$B_Y(f(x_0), r_1) \subseteq f(A)$$

$$f(B_X(x_0, r_0)) = f(x_0 + r_0 B_X(0, 1))$$

$$= f(x_0) + r_0 f(B_X(0, 1))$$

$$= f(x_0) + \frac{r_0}{R} f(B_X(0, R))$$

$$\supseteq f(x_0) + \frac{r_0}{R} B_Y(0, 1)$$

$$= B_Y(f(x_0), \frac{r_0}{R})$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Per ogni $y \in B_Y(0, 1)$ sappiamo che esiste
 $x \in B_X(0, R)$ t.c.

$$f(x) = y$$

Cioè $\forall y \in B_Y(0, 1)$ definisco $S(y) =: x$ e ho che

$$f(S(y)) = y$$

$$\|S(y)\| \leq R$$

In generale per ogni $y \in Y$ con $y \neq 0$ (altrimenti $S(0) = 0$)
osservo che

$$\frac{y}{2\|y\|_Y} \in B_Y(0, 1)$$

A questo posso associare $x \in B_X(0, R)$ b.c.

$$f(x) = \frac{y}{2\|y\|_Y}$$

e pone poi $S(y) = 2\|y\|_Y \cdot x$. Per linearità questo risolve e soddisfa

$$\|S(y)\|_X \leq 2R \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Idea: se so risolvere nella palla, per linearità so risolvere ovunque.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Automatico con $R = M$.

Prop 3 Sia X Banach, Y normato, $f: X \rightarrow Y$ lineare e continua.

Allora i seguenti fatti sono equi.

(i) Esiste un solver quantitativo

(ii) Esiste un solver quantitativo su un denso, cioè esistono $D \subseteq Y$ denso, $\hat{M} \in \mathbb{R}$, $S: D \rightarrow X$ tale che

$$f(S(y)) = y \quad \forall y \in D \quad \|S(y)\|_X \leq \hat{M} \|y\|_Y \quad \forall y \in D$$

[So risolvere $f(x) = y$ quando $y \in D$ in maniera QUANTITATIVA]

Inoltre in (ii) $\Rightarrow$ (i) la costante che mi viene in (i) è $2\hat{M}$.

Dim Basta fare (ii) $\Rightarrow$ (i).

Prendo $y \in Y$ e scelgo $y_n \rightarrow y$ con $y_n \in D$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ so che esiste $x_n \in X$ tale

$$f(x_n) = y_n \quad \text{e} \quad \|x_n\|_X \leq \hat{M} \|y_n\|_Y$$

Se per primo caso $x_n \rightarrow x_\infty$ in X , allora

$$f(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty$$

↑
continuità di f

Purtroppo so solo che gli $\{x_n\}$ sono limitati...

Altra idea: gli $\{y_n\}$ sono di Cauchy, quindi

$$\|y_n - y_m\|_Y \leq \varepsilon \quad \text{se } n, m \text{ grandi}$$

$$f(x_n) - f(x_m) = f(x_n - x_m) = y_n - y_m$$

e quindi

$$\|x_n - x_m\|_X \leq \hat{M} \|y_n - y_m\|_Y$$

e da qui concluderei

La dim è sbagliata per 2 motivi

- non so che $y_n - y_m \in D$ e quindi non ho vpo sul solver in $y_n - y_m$
- se anche stesse in D , non sarebbe detto che

$$S(y_n - y_m) = S(y_n) - S(y_m).$$

VICOLO CIECO.

— o — o —