

APPLICAZIONI LINEARI E CONTINUE

Domande:

- ① Se V e W sono sp. vett., esistono $f: V \rightarrow W$ lineari $\neq 0$?
- ② Se in aggiunta V e W sono sp. normati: esistono $f: V \rightarrow W$ lineari e continue $\neq 0$?
- ③ Come sopra, esistono $f: V \rightarrow W$ lineari NON continue.

CA : Choice Axiom

Risposta ① CA $\Rightarrow$ esiste base algebrica (base di HAMEL)
 $\Rightarrow$ usando la base dove mi pare e costruisco $f: V \rightarrow W$

Prop. ($\neq$ sfumature di continuità)

Sia V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$ LINEARE

Allora sono equivalenti i seguenti

- (i) f è continua ε/δ
- (ii) f è cont. per succ.
- (iii) f manda limitati di V in limitati di W
- (i') f è cont. ε/δ in 0
- (ii') f è cont. per succ. in 0
- (iii') $f(B_V(0,1))$ è limitato in W
- (iv) f è Lipschitziana

Dim (i) $\Rightarrow$ (i'), (ii) $\Rightarrow$ (ii'), (iii) $\Rightarrow$ (iii') sono ovvie.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) vale più in gen. in spazi metrici

(i') $\Rightarrow$ (i) segue dalla linearità

(ii') $\Rightarrow$ (ii) " " " "

(iii') $\Rightarrow$ (iii) segue dalla linearità $f(B_V(0,m)) = m f(B_V(0,1))$

(iv) $\Rightarrow$ tutto è ovvio

(iii') $\Rightarrow$ (iv) Supponiamo $f(\overline{B}_V(0,1)) \subseteq \overline{B}_W(0,M)$

Allora per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$ osservo che

$\frac{v}{\|v\|_V} \in \overline{B}_V(0,1)$ e quindi

$$\frac{1}{\|v\|_V} f(v) = f\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \in \overline{B}_W(0,M) \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{1}{\|v\|_V} \cdot \|f(v)\|_W \leq M$$

da cui $\|f(v)\|_W \leq M \|v\|_V$ e questa per linearità è la lip., in quanto

$$\|f(v_1) - f(v_2)\|_W = \|f(v_1 - v_2)\|_W \leq M \|v_1 - v_2\|_V$$

— 0 — 0 —

Risposta ③: se V ha dim. infinita, allora esistono
 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineari ma non continue

- Se $\dim(V) = +\infty$, possiamo trovare $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di vettori lin. indip. con $\|v_m\|_V = 1$.
- Con CA li completo ad una base di Hamel
- Definisco f ponendo $f(v_m) = m$ e $f(\text{altri el. base}) = 0$.
- Questa è lineare ma non continua perché (iii) non va

— 0 — 0 —

Per rispondere a ②, serve HB.

[Aggiunto dopo video: nella dim. delle $\neq$ sfumature, manca qualcosa che colleghi (i) o (ii) a (iii), del tipo (i) $\Rightarrow$ (iii'). Questa è semplice perché dalla continuità segue che $\exists r > 0$ t.c. $f(\overline{B}_V(0,r)) \subseteq \overline{B}_W(0,1)$, e di conseguenza $f(\overline{B}_V(0,1)) \subseteq \frac{1}{r} \overline{B}_W(0,1) = \overline{B}_W(0, \frac{1}{r})$]

Def. (Pseudo-norma) Sia V uno sp. vett.

Una pseudo-norma in V è una funzione $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(i) \quad p(u_1 + u_2) \leq p(u_1) + p(u_2) \quad (\text{subadditività})$$

$$(ii) \quad p(\lambda u) = \lambda p(u) \quad \forall u \in V \quad \forall \lambda > 0$$

(omogeneità positiva)

Non ci sono ipotesi di segno.

TEOREMA DI HAHN-BANACH (teo. di estensione)

Sia V sp. vett. e sia $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ una pseudo-norma su V .

Sia $E \subseteq V$ s.sp. vett., e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ un'applic.

lineare tale che

$$f(u) \leq p(u) \quad \forall u \in E \quad (\text{senza val. assol.})$$

Allora esiste $\hat{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\hat{f}(u) \leq p(u) \quad \forall u \in V$$

$$\hat{f}(u) = f(u) \quad \forall u \in E$$

Dim Consideriamo $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le coppie (F, g) tale che

- F è un s.sp. vett. con $F \supseteq E$
- $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ è una estensione di f che verifica la stima con la pseudo-norma in F .

Su $\mathcal{F}$ è possibile definire un ordinamento parziale

$$(F_2, g_2) \geq (F_1, g_1) \iff \begin{aligned} F_2 &\supseteq F_1 \\ g_2 &= g_1 \text{ su } F_1 \end{aligned}$$

In questo ordinamento tutte le sotto-famiglie tot. ordinale ammettono un maggiorante $\{(F_i, g_i)\}_{i \in I}$

Il maggiorante è del tipo $F_\infty := \bigcup_{i \in I} F_i$ con g_∞ def. compatib.

CA $\Rightarrow$ ZORN $\Rightarrow$ esiste estensione massimale (non ulteriormente estendibile).

Sia (F, g) l'estensione massimale. Claim! $F = V$.

Se così non fosse esisterebbe $v_0 \in V \setminus F$. Faccio vedere che posso estendere g a $F + \mathbb{R}v_0$.

Basta trovare $g(v_0)$ e poi porre

$$g(v + \alpha v_0) := g(v) + \alpha g(v_0)$$

L'unico pbm. è che deve valere la stima

$$g(v + \alpha v_0) \leq p(v + \alpha v_0) \quad \forall v \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 0$ è ovvio
- Se $\alpha > 0$ raccolgo e porto fuori (uso conv. di p)

$$\alpha g\left(\frac{v}{\alpha} + v_0\right) \leq \alpha p\left(\frac{v}{\alpha} + v_0\right)$$

$\uparrow$
generico elem.
di F

quindi la stima vale se e solo se

$$g(w + v_0) \leq p(w + v_0) \quad \forall w \in F$$

- Se $\alpha < 0$ pongo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$ e raccogliendo

$$g(v - \beta v_0) \stackrel{?}{\leq} p(v - \beta v_0)$$

$$\cancel{g}\left(\frac{v}{\beta} - v_0\right) \stackrel{?}{\leq} \cancel{p}\left(\frac{v}{\beta} - v_0\right)$$

quindi vale la stima se e solo se

$$g(z - v_0) \leq p(z - v_0) \quad \forall z \in F$$

Conclusione: devo scegliere $g(v_0)$ tale che

$$g(w) + g(v_0) \leq p(w + v_0)$$

$$g(z) - g(v_0) \leq p(z - v_0)$$

$$g(z) - p(z - v_0) \leq g(v_0) \leq p(w + v_0) - g(w)$$

dove essere vera $\forall z \in F$ e $\forall w \in F$

Posso trovare $g(v_0)$ se dimostro che

$$g(z) - p(z - v_0) \leq p(w + v_0) - g(w) \quad \forall (z, w) \in F^2$$

Questa è vera perché

$$g(z) + g(w) = g(z+w) \leq p(z+w) \leq p(z-v_0) + p(w+v_0)$$

$\uparrow$ lin. $\uparrow$ stima in F $\uparrow$ sub-additività

e questa è equiv. a quella di sopra 😊

— o — o —

COROLLARIO (Funzionale ALLINEATO)

Sia V sp. normato e sia $v_0 \in V$.

Allora esiste $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che

$$f(v_0) = \|v_0\|_V$$

e

$$|f(v)| \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (\text{1-Lip.})$$

Dim Pongo $E := \mathbb{R}v_0$ e definisco $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\varphi(\alpha v_0) = \alpha \|v_0\|_V$$

e uso la norma di V come pseudo-norma.

È ovvio che $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e soddisfa

$$|\varphi(\alpha v_0)| = |\alpha| \cdot \|v_0\|_V \leq \|\alpha v_0\|_V$$

Per HB esiste una estensione, che è la f cercata.

— o — o —

Risposta (2) Se $W \neq \{0\}$ e $V \neq \{0\}$, allora esistono $f: V \rightarrow W$ lineari e continue

Dim. Da V in $\mathbb{R}$ uso il funzionale allineato, poi da $\mathbb{R}$ in W è facile trovare applic.

Componendo ho $f: V \rightarrow W$

— o — o —