

Generalizzazione ad $\mathbb{R}^d$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato e abbastanza regolare da avere Poincaré e la regolarità H^2 per le soluzioni di $\Delta u = f$.

$$H = L^2(\Omega) \quad Au = -\Delta u$$

con $D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Allora A è l'inverso di un operatore simmetrico compatto, quindi A ammette una diagonalizzazione, cioè esiste $\{e_n(x)\}$ ortonormale in H b.c.

$$-\Delta e_n(x) = \lambda_n^2 e_n(x) \quad \forall n \geq 1$$

↑
autovalori di $-\Delta$ con DBC

[Delirio: CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A DRUM?

Determinare Ω conoscendo gli autovalori di $-\Delta$ con DBC]

In analogia alla dim 1 vale che

$$u \in D(A^{1/2}) \iff u \in H_0^1(\Omega) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2 < +\infty$$

Proviamo a dim. una freccia. Oss. fondamentale è che

$\{De_n(x)\}$ sono ortogonali in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\Omega} \langle De_i(x), De_j(x) \rangle = - \int_{\Omega} e_i(x) \Delta e_j(x) = \lambda_j^2 \int_{\Omega} e_i(x) e_j(x) = 0$$

$$\int_{\Omega} |De_i(x)|^2 = \lambda_i^2 \int_{\Omega} |e_i(x)|^2 dx = \lambda_i^2$$

Supponiamo $u \in H_0^1$. Allora

$$u_n = \int_{\Omega} u(x) e_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_{\Omega} u(x) \Delta e_n(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{\Omega} \underbrace{\langle Du(x), De_n(x) \rangle}_{du} dx$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{1}{\lambda_n^2} du^2} < +\infty$$

Quadrato della componente
di Du rispetto a $\{De_n(x)\}$

La freccia opposta è analoga. Per guadagnare che la traccia al bordo è nulla occorre usare la continuità delle tracce.

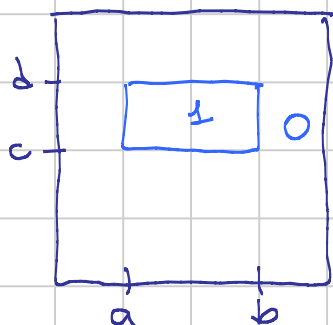
— o — o —

Esercizio 1 $\Omega = (0, \pi)^2$. Chi è base ortonormale di autovettori del Laplaciano DBC?

$$e_{m,n} = \sin(mx) \cdot \sin(ny) \quad (\text{a meno di costante})$$

L'autovalore con. è $m^2 + n^2$

[È chiaro che sono autovettori. Sene che lo span sia denso. O si va con Stone-Weierstrass o più facilmente si mostra che le caratt. dei rettangolini stanno nella chiusura



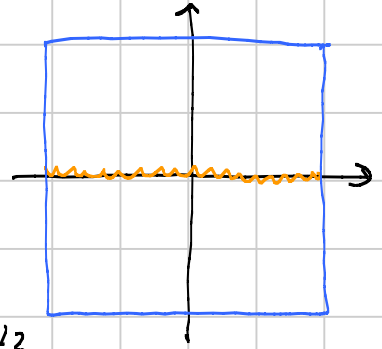
Basta prendere approx per caratt. di (a,b) e di (c,d) e moltiplicarle]

Esercizio 1 Se sono in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$ la base è

$$\cos(mx) \cos(my)$$

Esercizio 2 Prendo $u \in H_0^1((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2)$
e considero la sua traccia sull'asse x .

Dove sta? Sta in $H^{1/2}$ sing.



L'immagine della traccia def. su H_0^1 è $H^{1/2}$

Dam. $\Rightarrow$ Prendo $u \in H_0^1$ e mostro che la traccia $\in H^{1/2}$

$$u(x, y) = \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \cos(my) \quad \text{con}$$

$$\sum_{m, n} (m^2 + n^2) u_{m, n}^2 < +\infty$$

La traccia è

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{m, n} \right)}_{c_n} \cos(nx) \end{aligned}$$

Dico che $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n < +\infty$

Ora

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |u_{m, n}| \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m^2 + n^2) |u_{m, n}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m^2 + n^2) |u_{m,n}|^2 \right) n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right)$$

$$\leq \text{cost} \cdot \sum_{n,m} \dots$$

che sappiamo convergere

Funzione limitata di n (si fa con serie integrali)

$\Leftarrow$ Data $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 < +\infty$

La vogliamo estendere a tutto il $\square$ numerando H^1 .

Con un conto analogo, si dimostra che è a meno di costante la traccia di

$$\sum_{m,n} u_{m,n} \cos(mx) \cos(ny)$$

dove

$$u_{m,n} := \frac{c_n n}{m^2 + n^2}$$

$\Leftarrow$ qualcosa del genere

Idea: quando sommiamo su m resta $c_n \cdot \text{costante}$

Devo verificare che

$$\sum_{m,n} u_{m,n}^2 (m^2 + n^2) = \sum_{m,n} \frac{c_n^2 n}{m^2 + n^2} n$$

$\uparrow$ Quando sommiamo su m questo è $\leq \text{cost}$

— o — o —

Enunciato teo. spettrale + generale

Sia H sp. Hilbert separabile

Sia $A: D(A) \rightarrow H$ autoaggiunto (simmetrico e massimale)

Allora esistono • uno spazio di misura $(M, \mathcal{M}, \mu)$ con qualche proprietà

- una isometria

$$i: H \rightarrow L^2(M, \mu)$$

- una funzione misurabile $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & L^2(M) \\ \downarrow A & & \downarrow \text{Moltiplicazione per } \lambda(m) \\ H & \xrightarrow{i} & L^2(M) \\ & \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} & \end{array}$$