

Setting: intervallo $(0, \pi)$, $H = L^2((0, \pi))$, $A: D(A) \rightarrow H$

$$Au = -u_{xx} \quad \text{con DBC}$$

$$D(A) := H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi))$$

Esiste una base ortonormale di H che diagonalizza A , cioè

$$A e_n = n^2 e_n \quad \forall n \geq 1$$

↑ autovaleori (= cost. · sin(nx))

$$D(A^s) := \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n}_{\substack{\text{funz.} \\ \text{numeri}}} e_n(x) : \sum_{n=1}^{\infty} n^{4s} \underbrace{u_n^2}_{\substack{\text{dal senso a} \\ \text{dal senso a}}} < +\infty \right\}$$

($s > 0$ reale)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2)^s e_n(x) = A^s u$$

Oss. Per $s < 0$ posso definire $A^s: H \rightarrow H$ limitato, ma posso anche definirlo su un ambiente + grande, cioè $D(A^s)$ che in questo caso è $\supseteq H$.

Delirio $H^1((0, \pi)) \subseteq L^2((0, \pi))$

Chi ha il duale + grande?

• Dal p.to di vista di Riesz, è ovvio che $[H^1((0, \pi))]^\prime \subseteq (L^2)^\prime$

• D'altra parte, dato un funzionale $f: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$, questo per restrizione induce $\hat{f}: H^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

La mappa

$$f \rightarrow \hat{f} \quad (L^2)^\prime \rightarrow (H^1)^\prime$$

è lineare, continua e iniettiva.

In questo senso $(H^1)^\prime$ è più grande di $(L^2)^\prime$.

In pratica, il duale di H^1 è H^{-1} . Pensando in termini di componenti

$$L^2 = \{ \{u_n\} \in \mathbb{Q}^2 : \sum u_n^2 < +\infty \}$$

$$H^1 = \{ \{u_n\} \in \mathbb{Q}^2 : \sum n^2 u_n^2 < +\infty \}$$

$$H^{-1} = \{ \{u_n\} \text{ succ.} : \sum \frac{1}{n^2} u_n^2 < +\infty \}$$

Così descritto vale

$$H^1 \subseteq L^2 \subseteq H^{-1}$$

Terme
Hilbertiane

Esercizio : vedere che ogni el. del duale di H^1 (pensato come sottoinsieme di $\mathbb{Q}^2$) si rappresenta come elemento di H^{-1} .

Esercizio Supponiamo che $u \in H^s = D(A^{\frac{s}{2}})$ nel setting cubziale.

Allora se $s > \frac{1}{2}$ si ha che u è continua e quindi in particolare si annulla in 0 e π

Abbiamo $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sin(nx)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 < +\infty$

Se ho la conv. totale, allora ok

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^s |u_n| \frac{1}{n^s} \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right\}^{1/2}$$

Se $2s > 1$, abbiamo conv. totale.

Oss. Se $s < \frac{1}{2}$, esistono u illimitate che stanno in H^s

[Per esercizio provare con $|\log x|$]

Oss. Si tratta della condizione che nelle immersioni di Sobolev era $mp > d$

Achtung! Sia $u \in D(A^{1/2})$ che abbiamo visto essere $H_0^1(0, \pi)$

① Chi è $\|A^{1/2}u\|_{L^2}$? $\|u\|_{L^2}$

② Chi è $A^{1/2}u$? NON è $\ddot{u}$!

Dim. $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$

$$A^{1/2}u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n \sin(nx) \neq \ddot{u}(x)$$

$$\ddot{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot n^2 \cos(nx)$$

Ora essendo $\{\sin(nx)\}$ e $\{\cos(nx)\}$ ortogonali e quasi ortonormali, vale

$$\|A^{1/2}u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 = \|\ddot{u}\|^2$$

Esercizio Chi è $D(A^\pi)$?

Sono le $u \in H^{2\pi}$ che verificano le condizioni

$$u(0) = \ddot{u}(0) = u^{(4)}(0) = \boxed{u^{(6)}(0) = 0}$$

$$u(\pi) = \ddot{u}(\pi) = u^{(4)}(\pi) = \boxed{u^{(6)}(\pi) = 0}$$

su questa non ci so niente

Sono $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} n^{4\pi} u_n^2 < +\infty$

$$u^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin(nx) \cdot u_n \quad \text{Conv. tot. ?}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\pi} u_n n^{4-2\pi} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{4\pi} u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4\pi-8}} \right)^{1/2}$$

Se metto le derivate sotto esce $\frac{1}{n^{4\pi-12}}$, che non converge.

Esercizio Una delta di Dirac sta in H^{-1}

Delta $\frac{\pi}{2}$ $Lu := u(\frac{\pi}{2})$

Questa è una applicazione lineare e continua in H^1 .
La sua serie di Fourier è

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad (\text{a meno di costanti})$$

dove $a_n = \langle \delta_{\frac{\pi}{2}}, \sin(nx) \rangle = \sin(n\frac{\pi}{2}) = +1, 0, -1, 0, \dots$

e si vede che $\sum \frac{a_n^2}{n^2}$ converge

Esercizio Verificare che $\delta_{\frac{\pi}{2}}$ è la derivata della Heaviside

Basta scrivere la serie della HS
e derivare formalmente e vedere
che ottengo quella scritta sopra

— 0 — 0 —

