

INVERTER DELLA DERIVATA SECONDA
= DOPPIA PRIMITIVA CON BC

1° caso Intervallo $(0, \pi)$. Data $f \in L^2$, considero la doppia primitiva $\hat{F}$

che soddisfa $\hat{F}(0) = \hat{F}(\pi) = 0$ (DBC)

Dim di esistenza e unicità

1° modo: ne prendo una $\int_0^x dt \int_0^t f(s) ds$. Osservo che tutte

le altre si ottengono aggiungendo $ax+b$ e le DBC determinano a e b univocamente

2° modo: minimizzo $\int_0^\pi \frac{1}{2} \dot{u}^2 + u f$

Il minimo esiste per metodo diretto ed è unico per argomento di convessità (forse perché non è ovvio)

3° modo: Lax - Milgram!

Si verifica facilmente che la doppia primitiva è un operatore lineare, continuo, simmetrico, compatto

Oss. Avere la doppia primitiva garantisce l'operatore simmetrico

$$\int_0^\pi \hat{G}(x) f(x) dx = - \int_0^\pi G(x) F(x) dx = \int_0^\pi g(x) \hat{F}(x) dx$$

Chi sono autovalori / autovettori?

$$\hat{F}(x) = \lambda f(x) \quad \text{c'è regolarità per bootstrap}$$

Derivo due volte $f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$

Moltiplico per f : $f(x) f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)^2$
 $-\int_0^\pi f'(x)^2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi f(x)^2$

Quindi $\frac{1}{\lambda} < 0$, lo chiamo $-v$

$$f''(x) = -v f(x) \quad \text{con } f(0) = f(\pi) = 0$$

$\leadsto$ Analisi 1 $\leadsto v = n^2$ e $f(x) = \sin(nx)$

Se considero la doppia primitiva con HDBC
gli autovalori sono $-\frac{1}{n^2}$ ^{autocongenue}

L'operatore inverso $-\Delta''$ è un operatore non limitato
con autovalori n^2 e corrispondenti autovettori $\sin(nx)$

$$A : D(A) \longrightarrow H \quad A e_n = n^2 e_n$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $L^2((0, \pi))$

$$H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi))$$

$$\text{NON } H_0^2((0, \pi))$$

— o — o —

Achtung! Ogni $u \in L^2((0, \pi))$ si scrive come serie di
 $\sin(nx)$, anche se u NON NULLE al bordo
(la convergenza è solo L^2 , quindi niente di male)

Caso 2 Doppia primitiva su $(0, 2\pi)$ con PBC

$$\hat{F}(0) = \hat{F}(2\pi)$$

$$F(0) = F(2\pi)$$

Per sbucare la non unicità, ci restringiamo alle $f \in L^2$ a media nulla in partenza e arrivo

Dim ... andrebbe fatta ...

$$\min \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} u'^2 + f u : u(0) = u(2\pi), \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0 \right\}$$

[Provare con il metodo diretto]

Dando per buona esist, unicità, compattezza, ora gli autovalori sono $-\frac{1}{n^2}$ con autovettori $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$

Prendendo l'inverso, ed estendendolo a tutto $L^2((0, 2\pi))$ otteniamo che $-\Delta$ con PBC è un operatore non limitato

$$\begin{array}{ccc} A : D(A) & \longrightarrow & H \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{\text{per}}^2((0, 2\pi)) & & L^2((0, 2\pi)) \\ \text{periodiche} & & \end{array}$$

Gli autovalori sono n^2 con autovettori $\sin(nx)$, $\cos(nx)$
(anche 0 è autovalore con autovettore la costante 1).

— 0 — 0 —

3° caso Doppia primitiva con HNBC.

Anche qui occorre restringersi alla media nulla...

— 0 — 0 —

Torniamo al 1° caso:

$$A: H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi)) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

$$Au = -u'' \quad \text{con DBC}$$

Chi è il dominio di $A^{1/2}$? Risposta: $H_0^1((0, \pi))$

(Più in generale: $D(A^k) = H^{2k}((0, \pi)) + \text{qualche BC}$)

Sia $u \in L^2((0, \pi))$. La scrivo come

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n}_{\text{numeri}} \underbrace{e_n(x)}_{\sin(nx) \cdot \text{costante}}$$

$$\text{e } u_n = \int_0^{\pi} u(x) e_n(x) dx$$

Dico che

$$u \in H_0^1((0, \pi)) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^2}_{\substack{\uparrow 2s \\ \lambda_n}} u_n^2 < +\infty$$

$s = \frac{1}{2} \quad \lambda_n = n^2$

$\Rightarrow$ Supponiamo $u \in H_0^1$. Allora

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\pi} u(x) e_n(x) dx = c \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx \\ &= +c \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{\pi} u'(x) \cos(nx) dx}_{b_n} \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \sum n^2 u_n^2 = c^2 \sum b_n^2 \leftarrow \text{vornei che convergesse}$$

Ora $\{\cos(mx)\}$ è, a meno di una costante, un sistema ortonormale in $L^2((0,\pi))$

[1° modo: verifica diretta da Analisi 1

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ modo: } 0 &= \int_0^\pi e_i(x) e_j(x) dx \\ &= \int_0^\pi e_i(x) \frac{1}{j^2} \ddot{e}_j(x) dx \\ &= \frac{1}{j^2} \int_0^\pi \dot{e}_i(x) \dot{e}_j(x) dx \end{aligned}$$

Ora $\sum b_n^2$ è la serie delle componenti di $\hat{u}$ rispetto ad un sistema ortonormale (non serve nemmeno che sia completo!)

[$\Leftarrow$] Supponiamo ora $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$

Poniamo

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k e_k(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{in } L^2$$

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k \dot{e}_k(x) \quad \text{se converge in } L^2, \text{ converge a } \dot{u}(x)$$

Per dimostrare la convergenza basta osservare che $\dot{e}_i(x)$ sono ortogonali, quindi basta controllare che converga

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 \underbrace{\|\dot{e}_k(x)\|_{L^2}^2}_{n^2} < +\infty$$

Manca che sono nulli a bordo (la u) e questo segue dal fatto che

$\sum u_n \sin(nx)$ converge unif.

in quanto converge totalmente perché

$$\sum |u_n| = \sum \underbrace{u_n}_{=0} \underbrace{|u_n|}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=} \leq \left(\sum u_n^2 u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$$