

Problema Dati V e W spazi vettoriali normati, data $f: V \rightarrow W$ lineare e continua e surgettiva, trovare
 $S: W \rightarrow V$
 lineare e continua t.c. $f(S(w)) = w$ per ogni $w \in W$.

Geometria 1 (V e W di dim. finita) Prendiamo
 $K := \ker f$

Prendiamo $M \subseteq V$ s.s.p. t.c. $M \oplus K = V$, consideriamo $f: M \rightarrow W$ e osserviamo che è lineare, iniettiva e surgettiva.

Quindi basta prendere $S: W \rightarrow M$ inversa della restrizione

Ist. An. Mat. Se V e W sono Hilbert, funziona allo stesso modo.
 Prendiamo

$$K := \ker f \quad (\text{s.s.p. vett. chiuso di } V)$$

Allora posso scrivere

$$V = K \oplus K^\perp$$

e osservare che

↑ s.s.p. vett. chiuso, quindi a sua volta un Hilbert

$$f: K^\perp \rightarrow W$$

È lineare, continua, invertibile. Per il teo. della mappa aperta questa ammette un'inversa S lineare e continua.

— o — o —

Oss. Se V e W sono Banach, posso fare lo stesso se K ammette un supplementare topologico, cioè esiste $M \subseteq V$ s.s.p. vett. chiuso tale che

$$V = M \oplus K$$

Nei Banach l'esistenza di M non è scontata.

— o — o —

OPERATORI NON LIMITATI

Def. Sia V e W sp. vettoriali. Un operatore non limitato è un'applicazione lineare

$$A: D(A) \rightarrow W$$

dove $D(A) \subseteq V$ è un s.sp. vett., detto "dominio di A "

Oss. L'operatore nullo def. solo su un sottospazio, ma anche su tutto V , è un operatore non limitato

Def. Un operatore non limitato si dice

- chiuso se il suo grafico è chiuso in $V \times W$ (sto assumendo che V e W siano normati)
- massimale se non esiste un operatore chiuso che lo estende.

L'ESEMPIO (Operatori diagonali in Hilbert con base ortonormale)

Sia H spazio di Hilbert, sia $\{e_n\}$ base ortonormale, sia $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri.

Consideriamo l'operatore lineare definito da

$$A e_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

definito sul dominio

$$D(A) := \left\{ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n}_{u} \in H : \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2}_{< +\infty} < +\infty \right\}$$

garantisce che $Au := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n e_n$
sia in H

Oss. Si può identificare ogni $u \in H$ con la succ. $\{u_n\} \in \ell^2$ delle sue componenti risp. alla base.
In questo modo Au risulta identificato con $\{\lambda_n u_n\} \in \ell^2$

Caso speciale: quello in cui $\lambda_n > 0$. In questo posso definire le potenze di A

$$A^s e_n = \lambda_n^s e_n$$

e per linearità, se $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n$, allora

$$A^s u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s u_n e_n$$

In tutto questo s è un NUMERO REALE.

A questo punto possiamo anche definire

$$f(A) u := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) u_n e_n$$

per ogni funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Domandone: chi è il dominio di A^s ?

$$D(A^s) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 < +\infty \right\}$$

Oss. Se $\lambda_n \rightarrow +\infty$ e $s < 0$, allora $D(A^s)$ è più grande di H !!!

Oss. Se $u \in D(A^s)$ e $v \in D(A^{-s})$, allora posso considerare una specie di prodotto scalare tra u e v

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 < +\infty$$

Analogamente

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} v_n^2 < +\infty$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n v_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \lambda_n^s \lambda_n^{-s} v_n \right| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} \mu_n^2 \right)^{1/2}}_{\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} v_n^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Caso ancora più speciale. Sia H sp. di Hilbert separabile

Sia $L: H \rightarrow H$ operatore lineare, continuo, simmetrico, definito positivo, compatto.

Per il teo. spettrale esiste una base $\{e_n\}$ ortonormale, ed esistono numeri μ_n tali che

$$L e_n = \mu_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre $\mu_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_n \rightarrow 0$.

L'inverso di L è un operatore NON LIMITATO con autovalori $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ definito da

$$A e_n = \frac{1}{\mu_n} e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con dominio $\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \mu_n^2 < +\infty \right\}$
--- 0 --- 0 ---