

Lemma Sia Y normato e sia $D \subseteq Y$ denso.

Allora per ogni $y \in Y \setminus \{0\}$ esiste $\{y_m\} \subseteq D$ tale che

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y \leq 2 \|y\|_Y$$

Dim. Costruisco y_m per ricorrenza.

- Scelgo $y_1 \in D$ tale che $\|y - y_1\|_Y \leq \frac{1}{2} \|y\|_Y$
- Scelgo $y_2 \in D$ tale che $\|y - y_1 - y_2\|_Y \leq \frac{1}{4} \|y\|_Y$
(posso perché è equiv. ad approx $y - y_1$)
- ⋮
- Supponendo di aver scelto $y_1, \dots, y_k$, scelgo y_{k+1} in maniera tale che

$$\|y - y_1 - \dots - y_k - y_{k+1}\|_Y \leq \frac{1}{2^{k+1}} \|y\|_Y$$

↑ sto approx. questo

Per costruzione $\sum_{k=1}^m y_k \rightarrow y$ per $m \rightarrow +\infty$.

Vediamo la norma

$$\|y_1\|_Y \leq \|y - y_1\|_Y + \|y\|_Y \leq \|y\|_Y + \frac{1}{2} \|y\|_Y$$

⋮

$$\|y_{k+1}\|_Y \leq \|y - y_1 - \dots - y_{k+1}\|_Y + \|y - y_1 - \dots - y_k\|_Y$$

$$\leq \frac{1}{2^{k+1}} \|y\|_Y + \frac{1}{2^k} \|y\|_Y \leq \frac{1}{2^{k-1}} \|y\|_Y$$

Sommando dovrebbe venire, a meno di migliorare l'approx
straola facendo.

Dim Prop 3 dato il Lemma

Ipotesi: so risolvere quantitativamente in D

Tesi: so risolvere quantitativamente in Y

Dato $y \in Y$, prendo y_n come nel lemma, e prendo $x_n \in X$ tali che

$$f(x_n) = y_n \quad \|x_n\|_X \leq \hat{M} \|y_n\|_Y$$

Osservo che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge assolutamente perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \leq \hat{M} \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y \leq 2\hat{M} \|y\|_Y$$

Sia x_{∞} la somma della serie. Allora $\|x_{\infty}\|_X \leq 2\hat{M} \|y\|_Y$ e questo risolve

$$\begin{array}{ccc} f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) & = & \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n y_k \\ \downarrow \swarrow \text{continuità} & \nearrow \text{linearità} & \downarrow \\ f(x_{\infty}) & & y_{\infty} \end{array}$$

— o — o —

Oss. Ho usato che X è Banach per dire che $\sum x_n$ converge.

— o — o —

TEOREMA (MAPPA APERTA)

Siano X e Y sp. di Banach, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare e continua.

Allora sono fatti equiv.

(i) f è surgettiva (risolvibilità qualitativa di $f(x)=y$)
(ii) f è aperta (" quantitativa " ")

Dim. (ii) $\Rightarrow$ (i) già fatto sotto ipotesi più deboli

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ci sono 3 passi

- Esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\text{Clos}(f(B_X(0, m_0)))$ contiene un aperto
- Esiste $R > 0$ tale $\text{Clos}(f(B_X(0, R))) \supseteq B_Y(0, 1)$
- Dato R del p.to prec., allora $f(B_X(0, 2R)) \supseteq B_Y(0, 1)$, il che è equiv. ad essere mappa aperta.

Step 1 Pongo $C_k := \text{Clos}(f(B_X(0, k)))$ sono chiusi e l'unione è tutto per surgettività. Baire $\Rightarrow$ test

Step 2 Supponiamo $C_{k_0} \supseteq B_Y(y_0, r_0)$.

La tesi dovrebbe essere vera con

$$R = \frac{2k_0}{r_0}$$

Proviamo $y \in B_Y(0, 1)$. Allora

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{r_0} r_0 y = \frac{1}{r_0} (y_0 + r_0 y) - \frac{1}{r_0} y_0 \\ &\in \text{Clos}(f(B_X(0, \frac{k_0}{r_0}))) \quad \leftarrow \text{pure (corrisponde a } y=0) \\ &\in \text{Clos}(f(B_X(0, \frac{2k_0}{r_0}))) \end{aligned}$$

Step 3 Dallo step 2 sappiamo che $f(B_X(0, R))$ è denso in $B_Y(0, 1)$. Quindi, detto D questo denso, sappiamo che

$$\forall y \in D \quad \exists x \text{ b.c. } f(x) = y \quad \text{e} \quad \|x\|_X \leq R \|y\|_Y$$

Questa è la risolubilità quantitativa su un denso, che implica quella su tutto.

Fatto generale usato: se $\forall y \in \text{Densso in } B_Y(0,1)$ so trovare $x \in B_X(0,R)$ che risolve $f(x)=y$, allora $\forall y \in \text{Densso in } Y$ so trovare $x \in X$ che risolve $f(x)=y$ e soddisfa $\|x\|_X \leq R \|y\|_Y$

— o — o —

Corollario 1 Sia X, Y Banach, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare e continua.

Allora sono equiv.

(i) f è bigettiva

(convertibilità qualit.)

(ii) f^{-1} è lineare e continua

(" quantitativa)

Dim Quasi ovvia, visto che essere una mappa ^{aperta} implica la continuità dell'inversa.

Corollario 2 (Equiv. di norme) Sia V uno sp. vettoriale, e siano $\|v\|_1$ e $\|v\|_2$ due norme in V .

Supponiamo che

(i) V è un Banach rispetto ad entrambe le norme

(ii) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|v\|_1 \leq M \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

Allora esiste $m > 0$ tale che

$$\|v\|_1 \geq m \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

Dim Considero V_1 e V_2 i due sp. di Banach. Allora

$$\text{Id}: V_2 \rightarrow V_1$$

è per ipotesi lineare + continua, quindi Id è pure l'inversa.

— o — o —

Corollario 3 Siano X e Y due sp. di Banach, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare.

Allora sono equiv

(i) f è continua

(ii) il grafico di f è chiuso, cioè se $x_n \rightarrow x_\infty$ in X e $f(x_n) \rightarrow y_\infty \in Y$, allora $y_\infty = f(x_\infty)$

Dim Quella non ovvia è (ii) $\Rightarrow$ (i).

Consideriamo 2 norme in X , e cioè

$$\|x\|_1 := \|x\|_X$$

$$\|x\|_2 := \|x\|_X + \|f(x)\|_Y$$

È facile che sono norme e $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ per ogni $x \in X$

Se avessi la disug. opposta, avrei $\|x\|_1 \geq m \|x\|_2$ quindi

$$\|x\|_X \geq m \|x\|_X + m \|f(x)\|_Y$$

cioè

$$\|f(x)\|_Y \leq \frac{1-m}{m} \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

da cui la continuità.

Mi serve che X sia un Banach per la norma 2.

Prendiamo $\{x_n\}$ di Cauchy per la norma 2. Allora

$\{x_n\}$ è di Cauchy in X e $\{f(x_n)\}$ è di C. in Y

Quindi $x_n \rightarrow x_\infty$ per la norma di X

$f(x_n) \rightarrow y_\infty$ per la norma di Y

Per l'ipotesi di grafico chiuso sappiamo che $y_\infty = f(x_\infty)$.

Ora devo osservare che $x_n \rightarrow x_\infty$ per la norma 2.

Questo segue da

$$\|y_\infty - f(x_n)\|_Y$$

$$\|x_\infty - x_n\|_2 = \underbrace{\|x_\infty - x_n\|_X}_0 + \underbrace{\|f(x_\infty - x_n)\|_Y}_0 \rightarrow 0$$

Punto della situazione

Data $f: X \rightarrow Y$ voglio
risolvere $f(x) = y$

- ① Se f è lineare + surgettiva, allora esiste un solver lineare

[Dim: come a geometria e, con tanto CA]

- ② Se f è aperta, allora esiste un solver quantitativo

Domanda: se f è lineare + continua + surgettiva
(dunque aperta), esiste un solver
lineare + quantitativo?

Risposta:

→ in generale NO

→ negli Hilbert SI.

— o — o —