

BAIRE POINT 9

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica
 la cui serie di Fourier non converge ad $f(x)$
 in almeno un p.to.

Dim. Supponiamo anche f a media nulla, così la
 serie di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$$

dove

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Siano $S_n(x)$ le somme parziali della serie. A meno
 della costante π

$$\begin{aligned} S_n(x) &:= \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) [\sin(kt) \sin(kx) + \cos(kt) \cos(kx)] dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k(t-x)) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=1}^n \cos(k(t-x))}_{D_n(t-x)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

Ci concentriamo wlog su $x=0$

$$S_n^f(0) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) dt$$

C'è una formula per $D_n(t)$:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$$

(si dimostra pensando
 $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$)

Supponiamo che per ogni f continua e 2π -periodica, si abbia che
spazio X Banach rispetto
conv. unif.

$$S_n^f(0) \rightarrow f(0)$$

Vorrebbe dire che per ogni $f \in X$ vale $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n^f(0)| < +\infty$

(sto pensando $X \ni f \rightarrow S_n^f(0) \in \mathbb{R}$)

Allora per BS vale $|S_n^f(0)| \leq M \|f\|_X \quad \forall f \in X$
 oppure equivalentemente

$$\|S_n^f(0)\|_{X'} \leq M$$

Quindi non basta dimostrare che le norme di $S_n^f(0)$ non sono equilibrate.

Fatto generale Qual è la norma di un operatore del tipo

$$f \rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

Si tratta di $\|g\|_{L^1(0, 2\pi)}$. Infatti $\leq$ segue da Hölder

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt \right| \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$$

Per il $\geq$ vorrei tanto usare $f(x) = \operatorname{sign} g(x)$, che però non è continua.

Allora prendiamo $f_m: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ continue che approssimano $\operatorname{sign} g(x)$ nel senso della conv. puntuale quasi ovunque (basta fare delle convulsioni).

A questo per conv. dominata

$$\int_0^{2\pi} f_m(t) g(t) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} |g(t)| dt = \|g\|_{L^1}$$

Fatto questo, non ci resta che dim. che

$$\int_0^{2\pi} |D_m(t)| dt \rightarrow +\infty \quad \text{per } m \rightarrow +\infty$$

e questo è esercizio di Analisi 1

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin \frac{t}{2}} dt &\geq 2 \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2} \\ &= 2 \int_0^{(n+\frac{1}{2}) \cdot 2\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy \\ &\rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy = +\infty \\ &\quad \text{--- } 0 \quad \text{--- } 0 \quad \text{---} \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che $S_m^f(0)$ non è limitato come operatore, quindi per BS in versione alternativa si ha che

$\{f \in X : |S_m^f(0)| \text{ non è limitata} \}$
(dunque di sicuro non converge)

è un G_δ denso.

Ripetendo il ragionamento con un qualunque $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi]$ troviamo che esiste un G_δ denso contenuto in X tale che

$$\forall f \in G_\delta \quad \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi] \quad S_n^f(q) \text{ non \u00e9 limitata}$$

Pu\u00f2 essere che la serie converga nei p.ti che non stanno in $\mathbb{Q}$?

Dim che NO Definiamo

$$S^*(f, x) := \sup \{ |S_n^f(x)| : n \in \mathbb{N} \}$$

Fissata f , questa \u00e9 una funzione di x che \u00e9 sup di funzioni continue, quindi \u00e9 SCI.

L'insieme dei p.ti in cui una funzione SCI vale $+\infty$ \u00e9 un G_δ perch\u00e9, se $g(x)$ \u00e9 questa funzione, si pu\u00f2 scrivere come

$$\{x \in \mathbb{R} : g(x) = +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : g(x) > k\}}_{\text{aperti}}$$

Nel nostro caso l'insieme degli x per cui $S^*(f, x) = +\infty$ \u00e9 un G_δ denso perch\u00e9 contiene $\mathbb{Q}$, quindi contiene molti pi\u00f9 punti rispetto a $\mathbb{Q}$.

Conclusione Esiste un G_δ denso contenuto nelle funzioni continue e 2π -periodiche tale che, per ogni f appartenente a questo insieme, la serie di Fourier non converge per ogni x appartenente ad un G_δ denso in $\mathbb{R}$.

Fatto Se $f \in H'((0, 2\pi))$, allora la serie di Fourier converge uniformemente a f .

Dim Se i coeff. decadono abbastanza, allora la conv. unif. segue da quella totale

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

(usato condizioni periodiche al bordo)

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos(nt) dt$$

da cui

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)| \cdot |\cos(nt)| dt$$

$$\leq \frac{1}{n\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} |\cos(nt)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Non basta. Se avessi come ipotesi $f \in H^2$, allora verrebbe un'altra n al denominatore.

Idea generale : più $f \in H^k$, più i coeff. decadono
— 0 — 0 —

Esercizio Non c'è nessuna norma che renda $\mathbb{R}[x]$ completo. Cosa succede se completo $\mathbb{R}[x]$ rispetto a

$$\int_0^{2\pi} |p(x)| dx \quad ?$$