

BAIRE POINT 6 Uno sp. di Banach (o di Hilbert) NON può avere base ALGEBRICA numerabile

Dim Sia $\{u_n\}$ base algebrica. Considero

$$C_k := \text{Span} \{u_1, \dots, u_k\}$$

Allora i C_k sono chiusi e hanno parte interna $\emptyset$. Se è vero ho un assunto perché la loro unione è tutto lo spazio.

- Parte interna $\emptyset$ è semplice: altrimenti contenebbero una palla centrata in un certo $v \in C_k$ e quindi contenebbero $v + \varepsilon u_{k+1}$

per ε piccolo.

- Perché sono chiusi?

Fatto generale Se V è sp. normato e $W \subseteq V$ è s.sp. vett. di dim. finita, allora W è chiuso.

Dim 1 Sia $w_1, \dots, w_k$ una base algebrica di W .

Posso identificare W con $\mathbb{R}^k$

$$\mathbb{R}^k \ni (c_1, \dots, c_k) \rightarrow c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \in W$$

Su W posso mettere 2 norme

- norma ereditata da V
- norma ereditata da $\mathbb{R}^k$ $\|w\| = \{c_1^2 + \dots + c_k^2\}^{1/2}$

Cauchy: 2 norme in uno sp. di dim. finita sono equiv.

Quindi W è completo anche rispetto alla norma che eredita da V e quindi è chiuso.

Dim 2 (con le mani)

Prendiamo una successione di elementi di W , che scriviamo come

$$c_1^n w_1 + \dots + c_k^n w_k = v_n$$

Sappiamo che $v_n \rightarrow v_\infty$ su V . Volemmo che $v_\infty \in W$.

Ci piacerebbe tanto che

$$c_1^n \rightarrow c_1^\infty$$

$$\vdots$$

$$c_k^n \rightarrow c_k^\infty$$

almeno a livello di s.succ.

Ci servirebbe che i coeff. sono limitati. Per questo posso usare l'equiv. delle norme o ragionare per assurdo.

Supp. che non lo siano, wlog $c_1^n \rightarrow +\infty$ a meno di s.succ.

Considero $\frac{1}{c_1^n} v_n$ (divido tutto per c_1^n) e lo indico con

$$w_1 + a_2^n w_2 + \dots + a_k^n w_k$$

Posso anche supporre che c_1^n fosse il coeff. + grande in valore assoluto. Ora so che $|a_i^n| \leq 1$ per ogni i, n , quindi a meno di s.succ.

$$a_i^n \rightarrow a_i^\infty$$

e quindi

$$\boxed{\frac{1}{c_1^n} v_n}$$

$\downarrow$
0

$$\rightarrow w_1 + a_2^\infty w_2 + \dots + a_k^\infty w_k = 0$$

quindi i $w_1, \dots, w_k$ non sono lin. indep.

— 0 — 0 —

BAIRE POINT 7

Teorema (BANACH - STEINHAUS)

Siano X sp. di Banach, Y sp. normato, $L_i : X \rightarrow Y$ operatori lineari continui con $i \in I$ (insieme di indici). Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(i) per ogni $x \in X$ vale $\sup_{i \in I} \|L_i(x)\|_Y < +\infty$ (LIMITAZIONE QUALITATIVA)

(ii) $\sup_{i \in I} \|L_i\|_{\infty(X,Y)} < +\infty$, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ b.c.

$$\|L_i(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X \quad \forall i \in I$$

(LIMITAZIONE QUANTITATIVA)

Dim Basta fare (i) $\Rightarrow$ (ii). Cerco di rendere la (i) quantitativa. Pongo

$$C_K := \{x \in X : \|L_i(x)\|_Y \leq K \quad \forall i \in I\}$$

I C_K sono chiusi (perché le L_i sono continue) e la loro unione è X per ipotesi (i).

Allora almeno uno ha parte interna, chiamo

$$B(x_0, r_0) \subseteq C_{K_0}$$

cioè

$$\|L_i(x_0 + r_0 v)\|_Y \leq K_0 \quad \forall v \in B(0,1) \quad \forall i \in I$$

Cerco di ottenere limitazione per $L_i(v)$. Osservo

$$L_i(v) = \frac{1}{r_0} L_i(r_0 v) = \frac{1}{r_0} L_i(x_0 + r_0 v) - \frac{1}{r_0} L_i(x_0)$$

da cui

$$\begin{aligned} \|L_i(v)\|_Y &\leq \frac{1}{r_0} \|L_i(x_0 + r_0 v)\|_Y + \frac{1}{r_0} \|L_i(x_0)\|_Y \\ &\leq \frac{2k_0}{r_0} \quad \forall i \in I \quad \forall v \in B(0,1) \end{aligned}$$

Facendo il sup su v troviamo $\|L_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{2k_0}{r_0}$.

— o — o —

Enunciato alternativo:

BANACH-STEINHAUS bis Siano X, Y, L_i come sopra. Allora sono alternativi i seguenti fatti

(i) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|L_i(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$ per ogni i, x

(ii) esiste un G_δ denso in X ($\cap$ num. di aperto) tale che per ogni x in questo insieme vale

$$\sup \{ \|L_i(x)\|_Y : i \in I \} = +\infty$$

Dim. Prendiamo i C_k come prima

- Se almeno uno di questi ha parte interna $\neq \emptyset$, allora siamo nel caso (i)
- Se tutti hanno parte interna vuota, allora

$$\sup \{ \|L_i(x)\|_Y : i \in I \} < +\infty$$

per x nella loro unione, che quindi è un F_σ con parte interna vuota, quindi il sup è $+\infty$ nel complementare, che è G_δ denso.

— o — o —

BAIRE POINT 8

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e non derivabile in nessun punto, anzi ne esistono proprio tante.

Dim. Sia X lo spazio delle funzioni cont e limitate con la norma del sup. Questo è un Banach.
Pongo

$$C_k := \{ f \in X : \exists x \in [-k, k], \forall h \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ |f(x+h) - f(x)| \leq k|h| \}$$

Claim:

- ① C_k è chiuso su X
- ② se f è derivabile in almeno un p.to, allora $f \in C_k$ per qualche k
- ③ C_k ha parte interna $\emptyset$

Se dimostro i claim, allora le f derivabili in almeno un p.to sono contenute in un F_σ con parte interna $\emptyset$.

Dim ①: Sia $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. con $f_n \in C_k$. Devo dire che $f_\infty \in C_k$. Sia x_n il p.to speciale di f_n .
A meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_\infty \in [-k, k]$
Dico che x_∞ è speciale per f_∞

$$\begin{array}{ccc} |f_n(x_n+h) - f_n(x_n)| & \leq k|h| & \forall h \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ \downarrow & \downarrow \leftarrow \text{teo. doppio scambio} & \\ |f_\infty(x_\infty+h) - f_\infty(x_\infty)| & \leq k|h| & \end{array}$$

Dim ② Se f è deriv. in x_0 , allora

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq 2|f'(x_0)| \quad \text{per } |h| \leq \delta$$

Basta prendere k in maniera tale che

$$x_0 \in [-k, k]$$

$$\frac{1}{k} \leq \delta$$

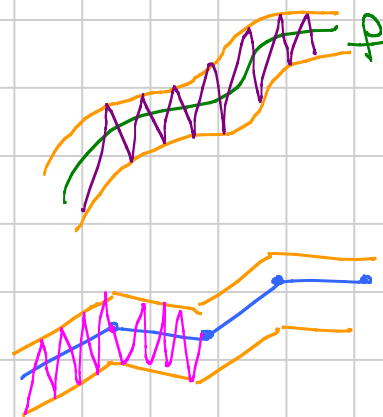
$$k \geq 2 |f'(x_0)|$$

Dim ③ Data $f \in X$ e dato $\varepsilon > 0$, devo trovare in $B_X(f, \varepsilon)$ delle funzioni che non stanno in C_k

Idea

- posso approx. f a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ con funzioni affini a tratti (basta unire dei puntini sul grafico abbastanza ravvicinati)

- posso approx. ogni affine a tratti a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ con affini a tratti con pendenza $\geq 2k$, e che quindi non stanno in C_k .



— o — o —