

BAIRE POINT 2 (Analisi 1)

Non esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinua "solo" in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Def. Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice

- F_σ se è unione numerabile di chiusi
- G_δ se è intersezione numerabile di aperti.

Fatto generale L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione (anche tra due sp. metrici) è un F_σ .

Dim. lo facciamo (quasi wlog) nel caso di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 Rendiamo quantitativa la discontinuità
 Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$D_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 \text{ esistono } y, z \text{ in } [x-\delta, x+\delta] \text{ t.c.} \\ |f(y) - f(z)| \geq \varepsilon\}$$

Fatto: x_0 è un p.to di discontinuità $\Leftrightarrow x_0 \in D_\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che D_ε è chiuso. Sia $x_n \rightarrow x_\infty$ con $x_n \in D_\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Conclusione

qui trovo y e z che
vanno bene anche
per x_∞


$$\text{p.ti di disc.} = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon = \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ m \in \mathbb{N}}} D_{1/m}$$

Volendola fare complicata, possiamo definire

$$\text{osc}(f, x, \delta) := \sup \{ |f(y) - f(z)| : y \in [x-\delta, x+\delta], z \in [x-\delta, x+\delta] \}$$

$$\text{osc}(f, x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{osc}(f, x, \delta) \quad (\text{esiste per monotonia e può fare +\infty a tappeto})$$

Si verifica che

- f è continua in $x \Leftrightarrow \text{osc}(f, x) = 0$
- $x \in D_f \Leftrightarrow \text{osc}(f, x) \geq \varepsilon$
- $x \rightarrow \text{osc}(f, x)$ è semicont. sup. (i sopralivelli sono chiusi)

Fatto: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è un F_σ

Dim Se fosse $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ con C_n chiusi in $\mathbb{R}$

allora è evidente che $\text{Int}(C_n) = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora sarebbe

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

e quindi avrei scritto $\mathbb{R}$ come unione numerabile di chiusi con parte interna vuota.

Oss. Abbiamo dim. che il complementare di un denso numerabile in uno sp. di Baire non è F_σ

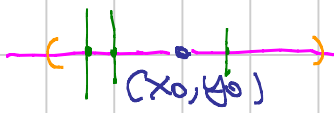
BAIRE POINT 3 (Analisi 2)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ SEPARATAMENTE CONTINUA e nulla su un denso.

Allora $f \equiv 0$.

Oss. È molto facile se il denso è $\mathbb{Q}^2$, ma esistono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ densi che intersecano ogni retta // agli assi al massimo una volta.

Dim. Per assurdo esiste (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) \geq 4\delta > 0$
Allora esiste $\rho_0 > 0$ t.c. $\uparrow$ WLOG

$$f(x, y_0) \geq 2\delta \quad \forall x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$$


Per ogni $x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$ esiste $r(x) > 0$ t.c.

$$f(x, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - r(x), y_0 + r(x)]$$

Mi servirebbe un minimo sindacale per $r(x)$...

Cerco di rendere il discorso quantitativo. Poniamo

$$C_k := \{x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0] : f(x, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k}]\}$$

$r(x) \geq \frac{1}{k}$

Si verifica che i C_k sono chiusi: se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora

$$\begin{aligned} f(x_n, y) &\rightarrow f(x_\infty, y) \quad \text{per cont. a } y \text{ fissato} \\ \geq \frac{1}{k} &\Rightarrow \geq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Inoltre l'unione dei C_k è $[x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$.

Quindi almeno uno C_{k_0} ha parte interna, cioè

$$(a,b) \subseteq C_{k_0}$$

Ma allora $f(x,y) \geq \delta$ in $(a,b) \times [y_0 - \frac{1}{k_0}, y_0 + \frac{1}{k_0}]$

Ma nel rettangolo casca almeno un p.to del denso.
— o — o —

BAIRE POINT 4 Sia H Hilbert. Sia $u_n \rightarrow u_\infty$ debole.

Allora $\{u_n\}$ è limitata

Dim. Per ogni $v \in H$ accade che

$$\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle$$

dunque il LHS è limitato. Rendiamolo quantitativo

$$C_k := \{v \in H : |\langle u_n, v \rangle| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Si verifica facile che C_k è chiuso e l'unione dei C_k è tutto H , che è spazio di Baire, quindi esiste

$$B(x_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

Dico che C_{k_0} contiene anche una palla centrata nell'origine
Per ipotesi

$$|\langle u_n, x_0 + r_0 w \rangle| \leq k_0 \quad \forall w \in B(0,1)$$

Ma allora

$$\langle u_n, w \rangle = \frac{1}{r_0} \langle u_n, r_0 w \rangle = \frac{1}{r_0} \langle u_n, r_0 w + x_0 - x_0 \rangle$$

da cui

$$\begin{aligned} |\langle u_m, w \rangle| &\leq \frac{1}{\lambda_0} \underbrace{|\langle u_m, x_0 + \lambda_0 w \rangle|}_{\leq k_0} + \frac{1}{\lambda_0} \underbrace{|\langle u_m, x_0 \rangle|}_{\leq k_0} \\ &\leq \frac{2k_0}{\lambda_0} \end{aligned}$$

Quindi ho dimostrato che $B(0,1) \subseteq C \frac{2k_0}{\lambda_0}$

Uso come w il vettore $\frac{u_m}{\|u_m\|}$ e ottengo

$$\|u_m\| \leq \frac{2k_0}{\lambda_0} \quad \text{--- o --- o ---}$$

BAIRE POINT 5 Sia V normato e sia $u_m \rightarrow u$ debole. Allora $\{u_m\}$ è limitata.

Dim Per ogni $f \in V'$ (Banach, quindi Baire) vale

$$f(u_m) \rightarrow f(u_\infty)$$

dunque LHS limitato. Poniamo

$$C_k := \{f \in V' : |f(u_m)| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$$

Sono chiusi e l'unione è tutto, quindi esiste

$$B_{V'}(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

$$\text{cioè} \quad |(f_0 + r_0 g)(u_m)| \leq k_0 \quad \forall g \in B_{V'}(0,1)$$

Voglio dim. che $B_{V'}(0,1) \subseteq C_{\text{qualcosa}}$

$$g(v_m) = \frac{1}{\lambda_0} \log(v_m) = \frac{1}{\lambda_0} [\log(v_m) + f_0(v_m) - f_0(v_m)]$$

da cui

$$\begin{aligned} |g(v_m)| &\leq \frac{1}{\lambda_0} \underbrace{|(f_0 + \log)(v_m)|}_{\leq k_0} + \frac{1}{\lambda_0} \underbrace{|f_0(v_m)|}_{\leq k_0} \\ &\leq \frac{2k_0}{\lambda_0} \end{aligned}$$

è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $g \in B_{r^*}(0,1)$.

Facciamo il sup su g a n fisso, per caratterizzazione duale della norma friviana

$$\|v_m\|_V \leq \frac{2k_0}{\lambda_0} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$