

SPAZI DI BAIRE

Idea: un sottoinsieme di uno spazio topologico è "piccolissimo" se è un chiuso con parte interna vuota.

Un sottoinsieme è "piccolo" se è unione numerabile di piccolissimi.

NB I sottoinsiemi piccoli sono stabili per unione numerabile.

Uno spazio di Baire è uno spazio in cui i piccoli hanno parte interna vuota.

Def. Uno spazio di Baire è uno sp. topologico in cui vale la seguente proprietà.

Se $\{C_n\}$ è una successione di chiusi, allora

$$\text{Int}(C_n) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \emptyset$$

Oss. Ci sono almeno altri 2 modi equiv. di dare la def.

• Se C_n sono chiusi e $\text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) \neq \emptyset$, allora

esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{Int}(C_{m_0}) \neq \emptyset$. (Counterpositive)

• Se A_n sono aperti densi per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ è densa.}$$

Oss. Negli spazi di Baire vale un pigeonhole topologico: se una unione numerabile non è piccola, almeno un termine non è piccolo.

Teorema 1 Gli spazi metrici completi sono sp. di Baire

Teorema 2 Gli spazi top. loc. compatti sono sp. di Baire

Prop. Se X è uno sp. di Baire e $A \subseteq X$ è aperto, allora A è uno sp. di Baire

Oss. Un chiuso in uno sp. di Baire non è detto che sia uno sp. di Baire.

(Ma un chiuso in un metrico completo sì)

(" " " top. loc. compatto sì)

[Controesempio: $\mathbb{R}^2$ meno irrazionali dell'asse x]

Dim. teo. 1 Usiamo la caratterizzazione con gli aperti densi.
Siano A_n aperti densi, voglio dim. che

$$A_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{è denso}$$

Basta dim. che A_∞ interseca ogni palla $B(x_0, r_0)$.

Idea: costruire x_n ed r_n tali che

$$B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n)$$

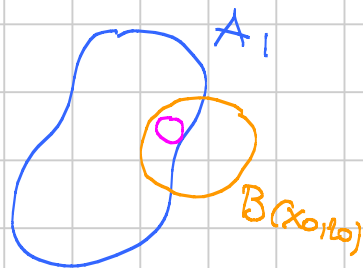
$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$$

$$r_n \leq \frac{r_0}{n}$$

La costruzione è induttiva

- Considero $A_1 \cap B(x_0, r_0)$, che è aperto $\neq \emptyset$ perché A_1 è denso
Dunque esiste

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq A_1 \cap B(x_0, r_0)$$



- Considero $A_2 \cap B(x_1, r_1)$, che è aperto $\neq \emptyset$ perché A_2 è denso. Dunque esiste

$$\bar{B}(x_2, r_2) \subseteq A_2 \cap B(x_1, r_1)$$

- E così via...

Claim: x_n è succ. di Cauchy e $x_n \rightarrow x_\infty \in A_\infty \cap B(x_0, r_0)$

La successione è di Cauchy perché definitivamente

$$x_n \in B(x_k, r_k) \quad \forall n \geq k$$

e $r_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

A questo p.to passando al limite

$$x_\infty \in \bar{B}(x_k, r_k) \subseteq A_k \cap B(x_0, r_0)$$

↑
è importante che ad essere contenute siano le palle chiuse

Essendo vero per ogni k abbiamo la conclusione.

— o — o —

La stessa tecnica funziona per il teo. 2

Dato un qualunque aperto M_0 , devo dim. che $A_\infty \cap M_0 \neq \emptyset$.

Costruisco una successione M_k di aperti con chiusura cpt. tali che

$$\bar{M}_{k+1} \subseteq M_k \cap A_{k+1}$$

A quel p.to pongo $M_\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{M}_k \neq \emptyset$ e sta in $M_0 \cap A_\infty$

↑
compatti
inestrolati

— o — o —

Esercizio

Aperto in Baire è Baire

$$A \subseteq X$$

Dim.

Prendo $C_n \subseteq A$ chiusi relativamente ad A e con parte interna vuota relativamente ad A , e spero che la loro unione abbia parte interna vuota in A .

Osservo che

$$C_k = A \cap \bar{C}_k$$

$\uparrow$ chiusura in X

Osservo che $\bar{C}_k$ sono chiusi in X con parte interna vuota (va verificato: una eventuale parte interna...)

Essendo X sp. di Baire

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{C}_n \text{ ha parte interna vuota in } X$$

Ma

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap \bar{C}_k) = A \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{C}_k \right)$$

e il RHS non può avere parte interna in A perché la avrebbe in X .

— o — o —

Esercizio distruttivo

- Provare a dim. che chiuso $\subseteq$ Baire è Baire
- Riuscirai
- Poi trovare l'errore visto che c'è il controesempio.

— o — o —

Provare a fare la dim. con gli aperti invece che con i chiusi.

Esempio di sp. NON di Baire

NON è $\mathbb{N}$ (è metrico completo!) (I pt hanno parte interna!)

È $\mathbb{Q}$!! I punti hanno parte interna $\emptyset$, ma la loro unione è tutto $\mathbb{Q}$ che ha parte interna.

BAIRE POINT 1 (Analisi 1)

Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. ^{continua} Supponiamo che esista $l \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = l \quad \forall x > 0$$

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Dcm. C'è una info. qualitativa che deve diventare quantitativa.

Fissato $\varepsilon > 0$ definiamo

$$C_k := \{x > 0 : |f(nx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq k\} \quad \begin{array}{l} \text{limite} \\ \text{quantitativo} \end{array}$$

Si vede che i C_k sono chiusi essendo f continua e la loro unione è tutto $(0, +\infty)$ che è sp. di Baire. Almeno uno ha parte interna.

Supponiamo

$$(a, b) \subseteq C_{k_0}$$

Allora

$$\begin{array}{l} \text{cioè} \\ |f(mx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq k_0 \quad \forall x \in (a, b) \\ |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \bigcup_{n \geq k_0} (na, nb) \end{array}$$

Idea: L'ultima unione contiene una semi-retta del tipo $[A, +\infty)$.

Per questo basta verificare che

$$\begin{array}{ccc} na & & ub \\ (& (&) \\ (nt+1)a & & (nt+1)b \end{array}$$

$$nb > (nt+1)a \text{ definitivamente.}$$

$$n(b-a) > a \text{ definitivamente. } \odot$$

— o — o —

Varianti da esplorare

- Cosa accade se $f(x)$ non è continua
- Cosa accade se f è continua e assunto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = l(x) \quad (\text{può dipendere da } x)$$

[Hint a voce].

— o — o —