

Prop. V sp. di Banach riflessivo

$f \in V'$ separabile

Allora

$$\|f\|_{V'} = \max \{ |f(v)| : v \in V \text{ con } \|v\|_V \leq 1 \}$$

↑
e non solo sup

Dim. Sia $\{v_m\}$ succ. supizzante. Essendo limitata esiste

$$v_{m_k} \rightarrow v_\infty \quad \text{debole}$$

Ma allora

$$f(v_{m_k}) \rightarrow f(v_\infty)$$

e mettendo il valore assoluto ho la tesi.

— 0 — 0 —

V separabile vs V' separabile

$\Rightarrow$ FALSA L^1 separabile, ma L^∞ no (tranne casi banali)

$\Leftarrow$ VERA

Step 1 Se V' è separabile, allora la sfera unitaria è separabile

(ogni sottoinsieme di un metrico separabile è separ.)

Step 2 Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ con $\|f_n\|_{V'} = 1$ densa nella sfera unitaria di V'

Cerco dei $v_m \in V$ "quasi allineati" con f_n , cioè

$$v_m \in V \quad \text{t.c.} \quad f_m(v_m) > \frac{1}{2} \quad \left[\text{e } \|v_m\| = 1 \right]$$

[Aggiunto dopo video]

Claim: $\text{Span}(v_m)$ è denso

(se lo dim. ho finito usando $\text{Span}_{\mathbb{Q}}(v_m)$)

Step 3 Pongo $W =$ chiusura dello Span

Se $W = V$ sono felice.

Se W è contenuto strettamente in V , esiste $f \in V'$ t.c.

$$f(w) = 0 \quad \forall w \in W$$

ma $f \neq 0$

[Si costruisce con HB: prendo $v_0 \in V \setminus W$ e definisco f in $W \oplus \mathbb{R}v_0$ in modo che $f \equiv 0$ in W ma non in v_0 e poi lascio estendere ad HB].

Vediamo che succede a $f(v_n)$ dove i v_n sono quelli costruiti sopra.

Posso costruire f con $\|f\|_{V'} = 1$ [basta aver preso v_0 con $\|v_0\| = 1$ e aver posto $f(v_0) = 1$].

Esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\|f_n - f\|_{V'} < \frac{1}{2}$ per densità

$$|f(v_n)| = |f(v_n) - f_n(v_n) + f_n(v_n)|$$

$$\geq |f_n(v_n)| - |f(v_n) - f_n(v_n)|$$

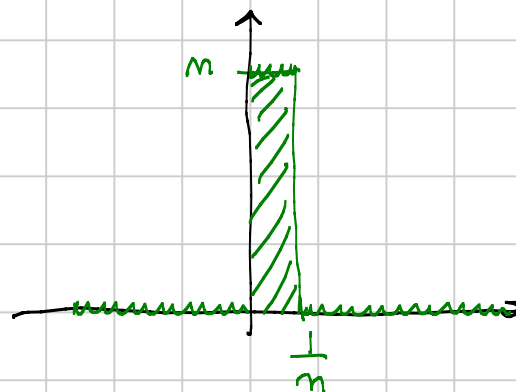
$$= \underbrace{|f_n(v_n)|}_{> \frac{1}{2}} - \underbrace{\|f - f_n\|_{V'}}_{< \frac{1}{2}} \underbrace{\|v_n\|_V}_1 > 0$$

e questo non va bene perché $f \equiv 0$ in W ,
— 0 — 0 —

Compattanza debole mancante per $p=1$

Esempio $L^1((-1,1))$

$\{f_n\}$ come in figura
è limitata in L^1 , ma
non ha s.succ. che conv.
debolmente.



Basta osservare che per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) \, dm(x) = n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) \, dx \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{teo. media int.} \\ \text{se } \varphi \text{ è continua}}]{\quad} \varphi(0)$$

e non esiste nessuna $u_\infty \in L^2(C_{-1,1})$ b.c.

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) \mu_0(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((-1,1))$$

Parentesi sul futuro Il duale di $C^0([-\underbrace{1, 1}]_{\text{compatto}})$ sono

(per un teorema misterioso) le misure con segno finite su $[-1, 1]$ con qualche proprietà tipo che i boreliani sono misurabili. Queste misure agiscono per integrazione

$$f(x) \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) d\mu$$

Le $\mu_n(x)$ di prima le posso vedere come misure e come tali sono limitate

$$f(x) \rightarrow \int_1^1 f(x) \underbrace{\mu(x) dx}_{\text{misura}} = L_m(f)$$

$$|L_n(f)| \leq \|u_n\|_{L^1} \cdot \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty = \|f\|_{C^0}$$

A questo punto ho la debole $\ast$ convergenza, cioè esiste una misura μ ed esiste m_k t.c.

$$\int_{-1}^1 f(x) \mu_{m_k}(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) d\mu_\infty \quad \forall f \in C^0([-1, +1])$$

In questo caso $\mu_\infty = \text{delta di Dirac}$.

Esercizio alla LAX-MILGRAM

Sia $f \in L^2((0,1))$. Dimostrare che esiste $u \in H_0^1((0,1))$ tale che

$$-\int_0^1 u_x \varphi_x dx = \int_0^1 f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

Approccio classico variazionale

Sto risolvendo $u_{xx} = f$ che è ELE di

$$F(u) = \int_0^1 (u_x^2 + u f) dx$$

Con il metodo diretto dim. che esiste

$$\min \{ F(u) : u \in H_0^1((0,1)) \}$$

e quel punto ricavo ELE debole calcolando la derivata di $F(u+t\varphi)$ e quella richiesta è la prima forma integrale.

Approccio + astratto

Considero lo spazio $H_0^1((0,1))$.
È un Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u_x v_x dx$$

Verifiche

→ bilinearità ovvia

→ definito positivo?

$$\langle u, u \rangle = \int_0^1 u_x^2 dx = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0 \text{ per DBC}$$

Esaminiamo RHS dell'equazione $\int_0^1 f \varphi$

Data $f \in L^2$ fissata, dico che questa è una applicazione lineare e continua in H_0^1 , vista come funzione di φ

$$\varphi \rightarrow \int_0^1 f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

è lineare + continua. Lineare è ovvio.

Continua?

$$\left| \int_0^1 f \varphi \right| \stackrel{?}{\leq} L \|\varphi\|_{H_0^1} = L \left\{ \int_0^1 \varphi_x^2 dx \right\}^{1/2}$$

POINCARÉ !!!

$$\left| \int_0^1 f \varphi \right| \leq \underbrace{\|f\|_{L^2}}_L \|\varphi\|_{L^2} \stackrel{\uparrow}{\leq} \left\{ \int_0^1 \varphi_x^2 dx \right\}^{1/2} \text{ per Poincaré}$$

Per Riesz in H_0^1 l'applicazione lineare si rappresenta con il prodotto scalare, quindi esiste $u \in H_0^1$ misteriosa tale che

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

"
LHS nell'eq.
iniziale.

— o — o —

Allo stesso modo si dimostra l'esistenza di solus. deboli per equ. del tipo

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f \quad u \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega$$

con $A(x)$ matrice ellittica e abb. regolare
 $\uparrow$ simmetrica

Formul. debole

$$-\int_{\Omega} \langle A(x) Du(x), D\varphi(x) \rangle = \int_{\Omega} f \varphi$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty \text{ opp } H_0^1$

Definisco $\langle\langle u, v \rangle\rangle := \int_{\Omega} \langle A(x) Du(x), Dv(x) \rangle$

Questo è prod. scalare su H_0^1 , e l'ellitticità è quella che mi dà def. pos.

Il RHS è lineare e continuo rispetto a questo prodotto

$$|\int f \varphi| \leq \|f\|_{L^2} \underbrace{\|\varphi\|_{L^2}}$$

$$\leq \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle^{1/2}$$

↑ Poincaré + lim. dall'alto per $A(x)$

Ora RIESZ fa il lavoro conclusivo.