

Perché le palle in $L^p(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sono debolmente compatte?

- Vero per $p \in (1, +\infty)$
- Vero per $p = +\infty$ nel senso di debole* compattezza.

Oss. In $L^2(\Omega)$ segue già dalla teoria degli sp. di Hilbert
In $L^p(\Omega)$ con $p \geq 2$ e Ω di misura finita segue dalla teoria in $L^2(\Omega)$

$[\{u_n\} \subseteq L^p(\Omega) \text{ limitata} \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{misura} \\ \text{finita}}]{\text{}} \{u_n\} \subseteq L^2(\Omega) \text{ limitata}]$

$\leadsto$ esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ debole $L^2(\Omega)$ $\leadsto$ per la SCI della norma L^p (e in realtà di qualunque funzionale con integrale convessa, addittività rispetto alla debole di L^1)
Segue che $u_\infty \in L^p(\Omega) \leadsto$ con un argomento di densità si otteneva $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ debole $L^p(\Omega)$]

Oss. La convergenza debole in $L^p(\Omega)$, senza ipotesi particolari su Ω , è la convergenza debole* nel duale di $L^{p'}(\Omega)$, e le palle sono debole* compatte nei duali degli spazi separabili (e gli L^p classici sono separabili)

Esempio $\{u_n\} \subseteq L^6(\Omega)$ limitata

Ora $L^6(\Omega)$ è $[L^{6/5}(\Omega)]'$. Quindi $\{u_n\}$ è limitata in $[L^{6/5}(\Omega)]'$. Quindi per compattezza debole*

esiste $u_{n_k} \xrightarrow{*} u_\infty$ debole $\neq$ in $(L^{6/5}(\Omega))'$

Questo è equivalente a dire che

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow \int_{\Omega} u_\infty v \quad \forall v \in L^{6/5}(\Omega)$$

e questa è la debole vera in $L^6(\Omega)$.

— o — o —

Nuovo tentativo di dimostrazione

Ipotesi: $\{u_n\} \subseteq L^6(\Omega)$ è limitata

Tesi: esiste $n_k \rightarrow +\infty$ monot. ed esiste $u_\infty \in L^6(\Omega)$ t.c.

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow \int_{\Omega} u_\infty v \quad \forall v \in L^{6/5}(\Omega)$$

Step 1 Prendo un denso $\overset{u_n}{D} \subseteq L^{6/5}(\Omega)$ e con il solito procedimento diagonale trovo una s.succ. u_{n_k} tale che

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in D$$

Step 2 So che $L_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, quindi estendibile a tutto $L^{6/5}(\Omega)$ con la stessa costante e si può dimostrare che

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{estensione}}}{L_\infty(v)} \quad \forall v \in L^{6/5}(\Omega)$$

[Volevo si può far vedere che $\int_{\Omega} u_{n_k} v$ è di Cauchy

per ogni v aggiungendo e togliendo una opp. $w \in D$]

Step 3 Con poca fatica si vede che la $L_\infty(v)$ estesa è lineare (lim. puntuale di lineari).
Vorranno tanto concludere che

$$L_\infty(v) = \int \mu_\infty v$$

per una opportuna $\mu_\infty \in L^1(\Omega)$.

Quello che serve è un TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE del duale di $L^{6/5}(\Omega)$.

— o — o —

Per $p = +\infty$ prendiamo una succ. $\{u_n\} \subseteq L^\infty$ limitata.
Allora esiste

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu_\infty \quad \text{debole } *$$

Nel dire questo stiamo pensando L^∞ come il duale di L^1

Dim Prendo un denso numerabile $D \subseteq L^1(\Omega)$ che fort. è separabile e trovo u_k t.c.

$$\int_\Omega \mu_{n_k} v \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in D$$

Con i soliti metodi vediamo che si può estendere L_∞ a tutto L^1 e

$$\int_\Omega \mu_{n_k} v \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in L^1$$

↑ estensione lin. + Lip.

Teo. di rappresentazione del duale ci dice che esiste $\mu_\infty \in L^\infty$ t.c.

$$L_\infty(v) = \int_\Omega \mu_\infty v \quad \forall v \in L^1.$$

— o — o —

Def. Dato V sp. normato esiste una mappa

$$J : V \rightarrow (V')'$$

definita da $[J(v)](f) = f(v) \quad \forall v \in V \quad \forall f \in V'$

Proprietà di J (1) J è lineare (banale)
(2) J è isometria (dunque iniettiva)

Dim (2) $\|J(v)\|_{(V')'} = \|v\|_V$

$\parallel$

$$\sup \{ |[J(v)](f)| : f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ |f(v)| : f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} \leq 1 \}$$

$$= \|v\|_V \quad \text{per caratt. duale della norma}$$

Def. Uno spazio normato V si dice riflessivo se

$J : V \rightarrow (V')'$ è surgettiva

Achtung! NON BASTA che ci sia una qualunque

$L : V \rightarrow (V')'$ lineare e isometrica.

Deve essere proprio la J .

Teorema Sia V sp. di Banach riflessivo.

Supponiamo che V' sia separabile (però che si paga per lavorare con le successioni)

Sia $\{u_n\} \subseteq V$ limitata.

Allora esiste

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty \text{ debole in } V$$

Dim 1 La convergenza debole in V è la conv. debole $*$ in $(V')'$.

Dim 2 Step 1 Prendo $D \subseteq V'$ denso e numerabile
Con un procedimento diagonale trovo n_k t.c.

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow L_\infty(f) \quad \forall f \in D$$

Step 2 Mostro che per ogni $f \in V'$ la succ. $f(u_{n_k})$ è di Cauchy, quindi

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow L_\infty(f) \quad \forall f \in V'$$

Osservo che L_∞ è lineare e l.p., dunque $L_\infty \in (V')'$

Step 3 Per la riflessività (cioè la surgettività di J) possiamo concludere che $L_\infty = J(u_\infty)$, cioè

$$L_\infty(f) = f(u_\infty)$$

da cui la tesi.

— o — o —