

Oss. Cosa fallisce nella dim. del duale di L^p se ci mettiamo in L^∞ ?

→ È ancora vero che lo span delle funzioni caratteristiche è denso

→ NON è più vero che

$$\| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \bigcup_{i=1}^n A_i \|$$

↑
nel senso L^∞

e quindi non si riesce a dim. che V è numerabilmente additiva, ma solo FINITAMENTE ADDITIVA.

Per queste misure NON vale RN in nessuna forma.

Oss. Si può dimostrare che $(L^\infty)'$ non è L^1 , almeno tramite casi speciali

Esempio: $L^\infty((-1,1))$. Prendiamo

$$L(f) = f(0) \quad \forall f \in \underbrace{C_c^\infty((-1,1))}_{\text{sottospazio}}$$

Questo è continuo sul sottospazio rispetto a $\|\cdot\|$ e quindi ammette almeno una estensione continua per H.B. Questa non si rappresenta con una $g(x)$, nemmeno sul solo sottospazio.

In questo caso per forza la V non sarebbe num. additiva.

— o — o —

Esempio $L^1((0, \infty))$ $L \in (L^1)'$ dato da

$$L(f) := \int_0^{+\infty} \arctan x \cdot f(x) dx$$

Si ha che $L \in (L^1)'$ e $\|L\|_{(L^1)'} = \frac{\pi}{2}$

ma non esiste nessuna $f \in L^1$ con $\|f\|_1 \leq 1$ t.c.

$$|L(f)| = \frac{\pi}{2}$$

Altro esempio in cui il sup nella def. di $\|L\|$ non è raggiunto.

Oss. Come caratterizzare il duale di $L^p(X, m, \mu)$ con misura solo σ -finita.

- quando X con sottosuccessi $X_k \subseteq X_{k+1}$ di misura finita
- osservo che ogni $L: L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare induce un $L^k: L^p(X_k) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare
- rappresento questi con $g_k \in L^{p'}(X_k)$ e dimostro che $g_{k+1} \equiv g_k$ in X_k
- definisco g_∞ unendo le g_k e dimostro che quella rappresenta L su tutto lo spazio.

— o — o —

DUALE DEGLI HILBERT

Versione breve: $H' = H$

Versione lunga: L'applicazione $J: H \rightarrow H'$ definita da

$$[J(u)](x) := \langle u, x \rangle$$

e'

- ben definita
- lineare
- bigettiva
- isometria.

È tutto quasi ovvio, tranne la surgettività, cioè per ogni
 $L: H \rightarrow \mathbb{R}$

lineare e continua, esiste $u \in H$ t.c.
 $L(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in H.$

Dim. 1, via base ortonormale

(richiede la separabilità,
oppure accettare basi non num.)

Sia $\{e_n\}$ una base. Pongo

$$u_n := L(e_n)$$

e spero che

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n$$

funzioni. Se dimostro che sta in H , allora ho finito
perché funziona su $\text{Span}(e_n)$ e quindi ovunque.
Per dim. che sta in H , facciamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^n u_i L(e_i) = L\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) \\ &\leq \|L\|_{H'} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n u_i e_i \right\|_H = \|L\|_{H'} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Porto al LHS e passo al limite in n .

Dim 2, via proiezione sul convesso chiuso

Sia K il Ker di L . Se $K = H$, usiamo $u = 0$.

Se K non è tutto H , allora è comunque un convesso chiuso. Prendo $w_0 \in K$ e pongo

$$u_0 = w_0 - P_K w_0 \quad (\text{questo è } \perp \text{ a } K)$$

Dico che vale la rappresentazione con

$$u = \frac{L(u_0)}{\|u_0\|^2} u_0$$

(riprova: deve succedere che $L(u_0) = \langle u, u_0 \rangle$)

Mostriamo che funziona per ogni $x \in H$. L'idea è che ogni $x \in H$ si scrive come

$$x = \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}}} \alpha u + \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}} w$$

Se questo è vero, allora

$$\langle u, x \rangle = \langle u, \alpha u + w \rangle = \alpha \|u\|^2 + \overset{0}{\langle u, w \rangle}$$

$$L(x) = L(\alpha u + w) = \alpha L(u) + \underset{0}{L(w)}$$

Le due espressioni coincidono se $L(u) = \|u\|^2$, e questa è una facile verifica.

Perché ogni $x \in H$ si scrive nella forma $\alpha u + w$?

Basta porre $\alpha := \frac{L(x)}{L(u)}$

$$L(\alpha u + w) = \alpha L(u), \quad \text{cioè} \quad \alpha = \frac{L(x)}{L(u)}$$

Se usiamo il valore di α suggerito abbiamo che

$$w = x - \alpha v = x - \frac{L(x)}{L(v)} v$$

e questo sta chiaramente nel ker perché

$$L(w) = L\left(x - \frac{L(x)}{L(v)} v\right) = L(x) - L(x) = 0.$$

Per semplicità controlliamo che

$$L(v) = \|v\|^2 \quad \text{con} \quad v = \frac{L(v_0)}{\|v_0\|^2} v_0$$

$$L(v) = \frac{L(v_0)}{\|v_0\|^2} L(v_0)$$

$$\|v\|^2 = \left(\frac{L(v_0)}{\|v_0\|^2}\right)^2 \cdot \|v_0\|^2$$



— o — o —

Oss Tutti gli Hilbert separabili sono iso-tutto a ℓ^2 .
Sapendo che $(\ell^2)' = \ell^2$ (cio, su duale spazi di succ.)
questo fornisce dim. alternativa di $H' = H$
(la realtà è da dim 1. di questa lezione).

— o — o —

Teorema misterioso

Versione breve: il duale di $C_0(X)$
(sp. funzioni continue "nulle al bordo")
è lo spazio delle misure di Radon in X
(misure positive con boreliani
misurabili + q.c.) che agiscono per
integrazione

$$L(f) = \int_X f(x) d\mu$$

— o — o —