

## DUALE DI SPAZI $L^p(X, m, \mu)$

- $(X, m, \mu)$  spazio di misura finita, cioè  $\mu(X) < +\infty$
- " " " "  $\sigma$ -finita, cioè  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$   
con  $\mu(X_n) < +\infty$
- caso generale

## Teorema misterioso (RADON-NIKODYM)

Sia  $X$  un insieme,  $m$  una  $\sigma$ -algebra.

Sia  $\nu: m \rightarrow \mathbb{R}$  una misura a valori reali (con segno)  
 $\uparrow$  numerabilmente additiva sui disgiunti

Sia  $\mu: m \rightarrow [0, +\infty)$  una misura positiva finita.

Supponiamo che  $\nu \ll \mu$ , cioè

$$\forall A \in m \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Allora esiste  $g \in L^1(X, m, \mu)$  tale che

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu \quad \forall A \in m.$$

— • — • —

Consideriamo  $(X, m, \mu)$  sp. di misura finita.

Per ogni coppia di funzioni  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  definiamo

$$[J(g)](f) := \int_X g(x) f(x) d\mu$$

Questo ha senso per opportune  $g$  ed  $f$ .

## Duale di $L^1$

Versione breve:  $(L^1)' = L^\infty$

Versione lunga: l'operatore  $J$ , visto come applicazione

$$J: L^\infty \rightarrow (L^1)'$$

è

- ben definito
- biiettivo
- lineare
- isometrico

Dim. Buona definizione:  $\forall g \in L^\infty$  e  $\forall f \in L^1$

$$|[J(g)](f)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

$$\text{da cui } \|J(g)\|_{(L^1)'} \leq \|g\|_\infty$$

Disuguaglianza opposta: se  $g \neq 0$  c'è poco da fare.

Se  $g \neq 0$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste sottoinsieme  $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$  di misura positiva tale che

$$|g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

Considero  $1_{A_\varepsilon}(x)$  (funzione caratteristica di  $A_\varepsilon$ )

$$(\|g\|_\infty - \varepsilon) \mu(A_\varepsilon) \leq \int_{A_\varepsilon} |g(x)| dx$$

$\in L^1$

$$= \int_{\mathbb{X}} g(x) \cdot \overbrace{\text{sign}(g(x)) 1_{A_\varepsilon}(x)}^{\in L^1} dx$$

$$\leq \|J(g)\|_{(L^1)'} \cdot \|\text{sign}(g(x)) 1_{A_\varepsilon}(x)\|_1 \leq \|J(g)\| \cdot \mu(A_\varepsilon)$$

Semplificando la misura e sfruttando l'arbitrarietà di  $\epsilon$  si ha l'uguaglianza.

**Surgettività** Prendiamo  $L: L^1 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e continua  
Per ogni  $A \in \mathcal{M}$  poniamo

$$\nu(A) := L(\mathbb{1}_A)$$

Vogliamo mostrare che  $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  è una misura con segno  
e  $\nu \ll \mu$

- $\nu(\emptyset) = 0$  banale
- Numerabile additività sui disgiunti:  $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$  e  
senza che

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Osservazione fondamentale

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$$

nel senso di  $L^1$  (Beppo - Levi)

Ne segue che

continuità di  $L$

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n L(\mathbb{1}_{A_i}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

- Assoluta continuità segue da

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \|1_A(x)\| \equiv 0 \quad (\text{nel senso } L^1 \text{ del termine})$$

$$\Rightarrow \nu(A) = L(0) = 0.$$

Per RN esiste  $g \in L^1(X)$  tale che

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Resta da dimostrare che  $g \in L^\infty(X)$ . Mostriamo che

$$\|g\|_\infty \leq \|L\|_{(L^1)'}$$

Sia  $\varepsilon > 0$ . Vogliamo dimostrare che

$$\{x \in X : g(x) \geq \|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon\} = A_\varepsilon$$

ha misura nulla.

$$\mu(A_\varepsilon) (\|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon) \leq \int_{A_\varepsilon} g(x) d\mu$$

$$= \int_X g(x) \cdot 1_{A_\varepsilon}(x) d\mu = \nu(A_\varepsilon) = L(1_{A_\varepsilon})$$

$$\leq \|L\|_{(L^1)'} \cdot \|1_{A_\varepsilon}\|_{L^1}$$

$$= \|L\|_{(L^1)'} \cdot \mu(A_\varepsilon)$$

Questa è possibile solo se  $\mu(A_\varepsilon) = 0$ . In modo analogo si ragiona con

$$B_\varepsilon = \{x \in X : g(x) \leq -\|L\|_{(L^1)'} - \varepsilon\}$$

- Occorre dimostrare che

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) d\mu \quad \forall f \in L^1$$

RN ci ha detto che questo vale per  $f = 1_A$  con  $A \in \mathcal{M}$ .  
Concludo osservando che le caratteristiche spaziano  
un denso in  $L^1$ .

— o — o —

Duale di  $L^p$  Versione breve:  $(L^p)' = L^{p'}$

Buona definizione: Hölder

Disuguaglianza opposta: si usa  $f(x) = |g(x)|^{p'-1} \text{sign}(g(x))$

L'osservazione fondamentale è che

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu \quad p(p'-1) = p'$$

Surgettività Definisco  $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  come nel caso  $L^1$   
e verifico la numerabile additività osservando che

$$\| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \|_{L^p} \rightarrow \| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \|_{L^\infty} \quad (\text{se } A_i \text{ sono disgiunti})$$

RN ci consegna  $g \in L^1$  t.c.

$$\int_A g(x) d\mu = \nu(A)$$

cioè

$$\int_{\mathbb{X}} g(x) 1_A(x) d\mu = L(1_A)$$

Grazie alla densità dello span delle caratteristiche, ho finito se dimostro che  $g \in L^{p'}$

- Dimostriamo che  $g \in L^{p'}$ . L'osservazione fondamentale è che

$$\int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) d\mu = L(f)$$

per ogni  $f \in L^\infty(\mathbb{X})$  (lo span delle caratteristiche è denso in  $L^\infty(\mathbb{X})$  e sappiamo che  $g \in L^1$ )

A questo punto per ogni  $n \in \mathbb{N}$  posso troncare  $g(x)$  tra  $-n$  ed  $n$  ottenendo  $g_n(x)$  e usare

$$f_n(x) = |g_n(x)|^{p'-1} \cdot \text{sign}(g(x)) \in L^\infty$$

$\uparrow$  è lo stesso di  $g_n(x)$

Ottendiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'} d\mu &= \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'-1} |g_n(x)| d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'-1} \cdot |g(x)| d\mu \\ &= \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'-1} \text{sign}(g(x)) \cdot g(x) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{X}} f_n(x) g(x) d\mu \\ &= L(f_n(x)) \\ &\leq \|L\|_{(L^p)'} \|f_n(x)\|_p \\ &= \|L\|_{(L^p)'} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'} d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Portando al LHS ottengo  $\|g_n\|_{p'} \leq \|L\|_{(L^p)'} e$  mandando  $n \rightarrow \infty$ .