

DUALE DI ℓ^p CON $p \in (1, +\infty)$

Il duale di ℓ^p è $\ell^{p'}$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

(quindi $(\ell^p)' = \ell^{p'}$)

È facile costruire $J: \ell^{p'} \rightarrow (\ell^p)'$ isometria lineare

Data $y \in \ell^{p'}$ si pone $J_y: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$J_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

La buona positura (cioè la conv. della serie) e la linearità seguono da Hölder

$$|J_y(x)| \leq \|y\|_{p'} \cdot \|x\|_p$$

Da questa segue pure che $\|J_y(x)\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_{p'}$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta devo usare la successione x con

$$x_n := |y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_n)$$

Vediamo il conto

$$\begin{aligned} \|J_y\|_{(\ell^p)'} \cdot \|x\|_{\ell^p} &\geq |J_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \underbrace{|y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_n)}_{x_n} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p'} \end{aligned}$$

Da questa segue che

$$\begin{aligned} \|y\|_{p'}^{p'} &\leq \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'} \cdot \|x\|_p \\ &= \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(p'-1)} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'} \cdot \|y\|_{p'}^{\frac{p(p'-1)}{p}} \end{aligned}$$

$p(p'-1) = pp' \left(1 - \frac{1}{p'}\right) = pp' \frac{1}{p} = p'$

Portando l'ultima norma al LHS segue

$$\|y\|_{p'}^{p'(1-\frac{1}{p})} = \|y\|_{p'} \leq \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'}$$

- Resta da dimostrare la surgettività, cioè per ogni $L: \mathcal{Q}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continua esiste $y \in \mathcal{Q}^{p'}$ t.c. $L = J_y$

Come definisco y ? Prendo $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } n}}{1}, 0, \dots)$ e pongo

$$y_n := L(e_n)$$

In questo modo è ovvio che, se fosse $y_n \in \mathcal{Q}^{p'}$, avremmo che

$$L(e_n) = J_y(e_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi L e J_y coincidono su e_n , quindi sullo span, quindi sulla chiusura dello span, che è proprio $\mathcal{Q}^p$. Occorre solo dire che $y \in \mathcal{Q}^{p'}$.

Occorre unire il conto precedente. Come prima poniamo

$$x_n := |y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_n)$$

e per ogni $m \in \mathbb{N}$ calcoliamo

$$\sum_{i=1}^m |y_i|^{p'} = \sum_{i=1}^m x_i y_i = \sum_{i=1}^m x_i L(e_i)$$

$$= L\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right)$$

$$\leq \|L\|_{\mathcal{L}(p,1)} \cdot \left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\|_p$$

$$= \|L\|_{\dots} \left\{ \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right\}^{1/p}$$

$$= \|L\|_{\dots} \left\{ \sum_{i=1}^m |y_i|^{p'} \right\}^{1/p'}$$

↑
stesso conto di prima $p(p'-1) = p'$

Portando al LHS troviamo

$$\left\{ \sum_{i=1}^m |y_i|^{p'} \right\}^{1/p'} \leq \|L\|_{\dots}$$

Essendo vero per ogni $m \in \mathbb{N}$ la serie converge, quindi
 $y \in \ell^{p'}$.

— o — o —

Estremamente diseducativo: il duale di c_0 è ℓ^1

Definiamo $J: \ell^1 \rightarrow (c_0)'$ come uno si aspetta

$$J_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

Vale la stima

$$|J_y(x)| \leq \|y\|_1 \cdot \|x\|_{\infty} \quad \leadsto \quad \|J_y\| \leq \|y\|_1$$

Questo dice che $J_y \in (c_0)'$ ma anche $(\ell^{\infty})'$, $(c)'$, $(c_{00})'$

Verifichiamo che $\|Jy\| = \|y\|_1$
 $\uparrow$ in tutti i duali di sopra

- In $(\ell^\infty)'$ è semplice perché posso usare x definito come

$$x_n := \text{sign}(y_n)$$

$$\text{Allora } |Jy(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1$$

Lo posso usare perché $x \in \ell^\infty$ e $\|x\|_\infty = 1$

- Negli altri non posso usare x perché è ben difficile che $x \in C_0$ o C_{00} o C .

Basta considerare $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ (trunca x mettendolo a 0 da $n+1$ in poi)

$$|Jy(\sum_{i=1}^n x_i e_i)| = \sum_{i=1}^n |y_i|$$

Facendolo il sup su n ottengo esatt. $\|y\|_1$.

Questo vale in C_{00} e quindi a maggior ragione negli spazi intermedi.

Domanda: dove J è suriettivo?

Risposta: solo sul duale di C_0

Prendo $L: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e costruisco y con $y_i = L(e_i)$

Si vede bene che $y \in \ell^1$. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |y_i| &= \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) \cdot y_i = \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) L(e_i) \\ &= L\left(\sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) e_i\right) \leq \|L\| \cdot \underbrace{\left\|\sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) e_i\right\|_\infty}_{=1} \end{aligned}$$

Essendo n arbitrario si deduce che $y \in \ell^4$.

Ora J_Y e L coincidono su $\text{Span}(e_i)$.

"succe. def. nulle" = C_{00}

ORA QUESTO SPAN È DENSO in C_0 ma non in ℓ^∞

Quindi J_Y e L coincidono SOLO in C_0 .

— o — o —

Chi è il duale di C_{00} ?

È lo stesso di C_0 , quindi ℓ^4 . Motivo: C_0 è il completamento di C_{00} (volendo C_{00} è denso in C_0), quindi ogni $L: C_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, dunque lip., dunque unif. continua, si estende in modo unico.

— o — o —

Chi è il duale di C ? Si può dimostrare in modo del tutto analogo che ogni $L: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n + y_\infty x_\infty$$

$\uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

La dimostrazione è del tutto analoga con

$$y_i := L(e_i)$$

$$e \quad y_\infty := L(\underbrace{1, 1, 1, \dots}_{e_\infty}) - \sum_{n=1}^{\infty} L(e_i)$$

A un certo punto si conclude osservando che lo span di tutte le e_i e e_∞ è davvero C .

La norma del funzionale scritto sopra è

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| + |y_{\infty}|$$

e quindi è come fare l'elemento $(y_{\infty}, y_1, y_2, \dots) \in \ell^1$
— o — o —

Nel duale di ℓ^{∞} c'è molta roba STRANA.

Prendo un qualunque elemento del duale di ℓ^{∞} , ad esempio

$$L(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Per HB questo si estende ad ℓ^{∞} .

Questa estensione è DRAMMATICAMENTE non unica.
— o — o —