

Duali di spazi normati

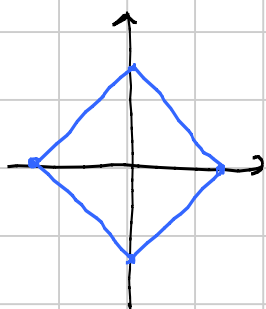
Già su $\mathbb{R}^2$ ci sono tante norme non isometriche

Norme su $\mathbb{R}^2$. Norme p -esime

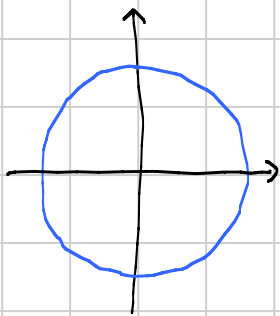
$$\|(x, y)\|_p := \{ |x|^p + |y|^p \}^{1/p}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall p \geq 1$$

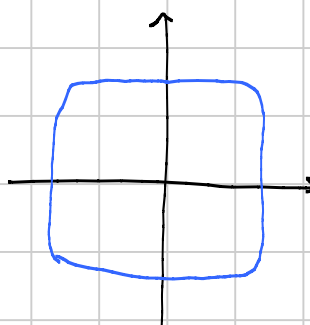
$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$



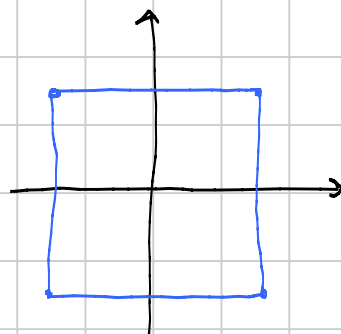
$p=1$



$p=2$



$p=4$



$p=\infty$

Esercizio $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_1$ è isometrico a $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_\infty$, cioè esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|(x, y)\|_1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Basta definire $f(x, y) := (x+y, x-y)$ e verificare che

$$\max\{|x+y|, |x-y|\} = |x| + |y|$$

(si dimostra distinguendo un po' di casi)

In $\mathbb{R}^2$ ci sono varie altre norme, e sono in corrispondenza con i convessi limitati che contengono l'origine come p.to interno e sono simm. risp. all'origine.

Esercizio Determinare il duale di $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_1$

Cerco $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e sono $f(x,y) = ax+by$ e cerco la norma indotta su V' .

Prendiamo $f(x,y) = ax+by$. Qual è la sua norma?

$$\sup \{ |ax+by| : (x,y) \text{ con } |x|+|y| \leq 1 \}$$

$$\begin{aligned} |ax+by| &\leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} \cdot (|x|+|y|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|ax+by\|_{V'} \leq \max\{|a|, |b|\}$$

Per la disug. opposta suppongo wlog che $|a| \geq |b|$ e uso $(x,y) = (\text{Sign}(a), 0)$. In questo modo $\|(x,y)\|_1 = 1$ e

$$\|f\|_{V'} \geq |f(x,y)| = a \cdot \text{Sign}(a) = |a|$$

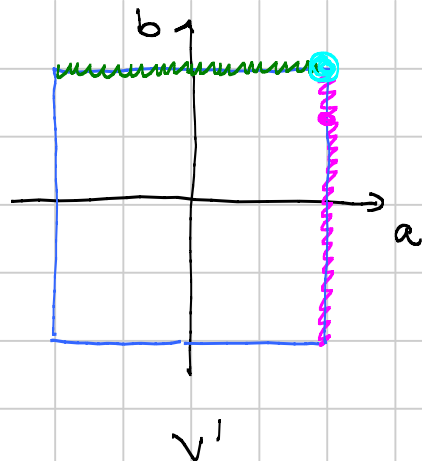
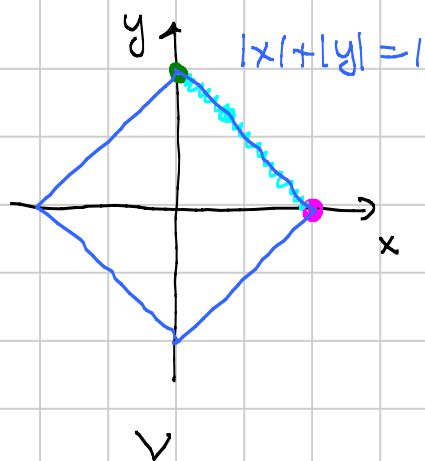
e questo mostra l'altra disuguaglianza.

Nell'esempio precedente, per ogni a e b con $\max\{|a|, |b|\} = 1$ esiste almeno un vettore (x,y) t.c. $|x|+|y| = 1$ e

$$\max\{|a|, |b|\} = \|f\|_{V'} = |f(x,y)|$$

e questo dice che $f(x,y) = ax+by$ è il funzionale allineato di (x,y) .

Ogni f è sfera unitaria di V' è allineato con almeno un vettore della sfera unitaria di V .



Accade che

- i funzionali allineati di $(1,0)$ sono tutti $f(x,y) = ax + by$ con $a=1$ e $b \in [-1,1]$
- i funzionali allineati di $(0,1)$ sono $f(x,y) = ax + by$ con $b=1$ e $a \in [-1,1]$
- i funzionali allineati di (x_0, y_0) con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$ e $x_0 + y_0 = 1$ sono unici e sempre lo stesso, cioè $f(x,y) = x + y$

— o — o —

Esempi classici di spazi di dim. infinita

Spazi di successioni : $\ell^p = \text{succ. } \{x_n\}$ con norma

$$\|x_m\|_p := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$$

$$\|x_m\|_{\infty} := \sup \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \}$$

Questi sono sp. di Banach

→ direttamente, come si è fatto con ℓ^2

→ usando il cannone $\ell^p = L^p(\mathbb{N})$

↑ con la misura che conta i punti

$$c_0 = \{ \{x_n\} \in \ell^{\infty} : x_n \rightarrow 0 \}$$

$$c_{\infty} = \{ \{x_n\} \in \ell^{\infty} : x_n = 0 \text{ definitivamente} \}$$

$$c = \{ \{x_n\} \in \ell^{\infty} : x_n \text{ ha limite per } n \rightarrow +\infty \}$$

Oss. C_0 e C sono sp. di Banach
(teo. di scambio dei limiti dell'analisi 2, dopo
aver pensato le succ. come funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
ed aver utilizzato il teorema di scambio dei
limiti con la conv. uniforme)
 C_0 non è completo, ma solo normato.

Spazi di funzioni: spazi $L^p(X, m, \mu)$ con $p \in [1, +\infty]$

$$C^0(K) = \{ f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \} \quad "C"$$

$\uparrow$
compatto

$$C_c^0(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue a supp. compatto} \} \quad "C_0"$$

$\uparrow$
metrico

$$C_0(X) = \overline{C_c^0(X)} = \text{chiusura di } C_c^0(X) \text{ rispetto alla norma } \infty$$

$=$ funzioni su X "nulle al bordo"
— o — o —

"C₀"

Domanda: come sono fatti i duali di questi spazi?

Caso 1 Il duale di ℓ^1 è ℓ^∞ .

Pongo $V := \ell^1$ e costruisco una applicazione $\ell^\infty \rightarrow (\ell^1)'$
che sia

- bigettiva
- lineare
- isometria

Data $y \in \ell^\infty$ (si intende $y = \{y_n\}$), costruisco

$$J_y: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

Come

$$J_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

- È ben definita e continua perché

$$|J_y(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \cdot |x_n| \leq \|y\|_{\infty} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_{\infty} \cdot \|x\|_1$$

Questo mostra che $\|J_y\|_{V'} \leq \|y\|_{\infty}$

- La linearità è quasi ovvia

- Serve che $\|J_y\|_{V'} = \|y\|_{\infty}$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $i \in \mathbb{N}$ t.c. $|y_i| \geq \|y\|_{\infty} - \varepsilon$

Considero x tale che $x_i = \text{sign}(y_i)$ e

$x_n = 0$ per ogni $n \neq i$

e osservo che

$$\|J_y\|_{V'} \geq |J_y(x)| = y_i \text{sign}(y_i) = |y_i| \geq \|y\|_{\infty} - \varepsilon.$$

$\uparrow$
ha $\|x\|_1 = 1$

- Serve la bigettività. L'iniettività segue dall'essere isometria. Manca la SURGETTIVITÀ, cioè che ogni $L: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua è del tipo descritto sopra!

Considero $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } n.}}{1}, 0, \dots)$

Pongo $y_n := L(e_n)$ e osservo che

$$|y_n| = |L(e_n)| \leq \|L\|_{V'} \cdot \|e_n\|_{V'} = \|L\|_{V'} \quad \text{quindi}$$

$y \in \ell^{\infty}$

Ora pongo

$$\hat{L}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

e osservo che L ed $\hat{L}$ coincidono su $\{e_n\}$, quindi
coincidono su $\text{Span degli } e_n$, il quale è denso in ℓ^2 .

— o — o —