

Teorema Sia V sp. normato, e sia $A \subseteq V$ un sottoinsieme.

Supp. che

(i) A è convesso

(ii) A è fortemente chiuso, cioè se $u_n \rightarrow u_\infty$ forte e $u_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $u_\infty \in A$.

Allora A è chiuso debole, cioè se $u_n \rightarrow u_\infty$ debole e $u_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $u_\infty \in A$.

Dim. Supponiamo $u_\infty \notin A$. Per il corollario di separazione forte esistono $f \in V'$ e $\delta_1 < \delta_2$ t.c.

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 = f(u_\infty) \quad \forall a \in A$$

Ma allora

$$f(u_n) \leq \delta_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e passando al limite pure $f(u_\infty) \leq \delta_1$. Assurdo.

Teorema Sia V sp. normato, e sia $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ (con
vec. lineare).

Supponiamo che

(i) φ è convessa

(ii) φ è sci forte

Allora φ è sci debole.

Dim. Data una qualunque $u_n \rightarrow u_\infty$ debole, devo dire che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u_\infty)$$

Se il LHS è $+\infty$, è fatta.

Supponiamo wlog che LHS = $l \in \mathbb{R}$.

Sia v_{m_k} la succ. che lo realizza, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(v_{m_k}) = L$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo il sottolivello

$$S_\varepsilon := \{v \in V : \varphi(v) \leq L + \varepsilon\}$$

↑ serve per averlo chiuso

Essendo φ sci e convessa, S_ε è convesso e chiuso forte per ogni $\varepsilon > 0$. Ora $v_{m_k} \in S_\varepsilon$ definitivamente in k . Poiché S_ε è anche chiuso debole per il te. prec., ne segue che $v_\infty \in S_\varepsilon$ e quindi $\varphi(v_\infty) \leq L + \varepsilon$.

Essendo ε arbitrario segue che $\varphi(v_\infty) \leq L$.

Prop. (Pseudo-norma associata ad un convessa)
(Gauge in inglese, jauge in francese)

Sia V sp. normato, e sia $C \subseteq V$.

Supponiamo che

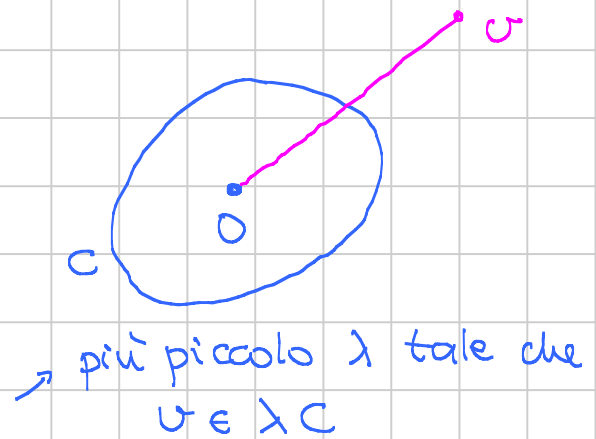
(i) C è convesso

(ii) C è aperto

(iii) C contiene 0.

Per ogni $v \in V$ poniamo

$$p(v) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\}$$



Allora valgono le seguenti proprietà

(1) p è una pseudo-norma

(2) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq p(v) \leq M \|v\|$ per ogni $v \in V$

(3) vale

$$C = \{v \in V : p(v) < 1\} \quad (\text{specie di palla unitaria})$$

Dim

$$p(v) := \inf \underbrace{\left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\}}_{A(v)}$$

Osservo che l'insieme $A(v)$

- è $\neq \emptyset$ (qui serve che una certa $B(0, r) \subseteq C$)
- è una semiretta destra
- è aperto (qui serve che C è aperto).

(1) Devo verificare due cose

- $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda > 0$. Questo segue da $A(\lambda v) = \lambda A(v)$

- $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$

Questo è dimostrato se facciamo vedere che

$$A(v_1 + v_2) \supseteq A(v_1) + A(v_2)$$

(poi sono proprietà degli inf.)

Dati $\alpha_1 \in A(v_1)$ e $\alpha_2 \in A(v_2)$ devo dimostrare che $\alpha_1 + \alpha_2 \in A(v_1 + v_2)$

$$\frac{v_1 + v_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \underbrace{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{\in C} \underbrace{\frac{v_1}{\alpha_1}}_{\in C} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{\in C} \underbrace{\frac{v_2}{\alpha_2}}_{\in C} \in C$$

hanno somma a 1: qui uso C convesso

(2) $p(v) \geq 0$ è ovvio. Per $p(v) \leq M \|v\|$, prendo $r > 0$ t.c.

$$\overline{B}(0, r) \subseteq C$$

e osserviamo che per ogni $v \in V \setminus \{0\}$ vale $r \frac{v}{\|v\|} \in C$
cioè $\frac{\|v\|}{r} \in A(v)$

$$\text{quindi } p(v) \leq \frac{\|v\|}{r} = \underset{\uparrow \frac{1}{M}}{M \|v\|}$$

(3) Devo dire due cose

- Se $v \in C$, allora $p(v) < 1$
(infatti $\pm e \in A(v)$, ma essendo $A(v)$ aperto d'inf., cioè $p(v)$ sarà < 1)
- Se $p(v) < 1$, allora $v \in C$
(se $p(v) < 1$, allora $\pm e \in A(v)$, cioè $\frac{v}{1} \in C$).

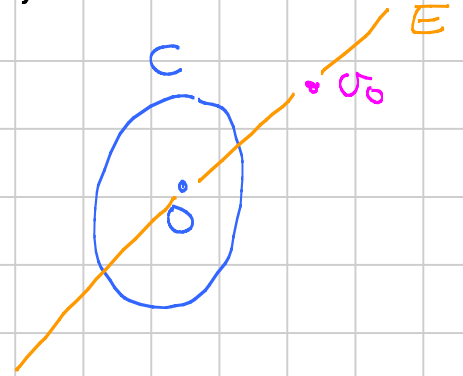
— o — o —

Prop. 0 Sia V sp. normato, sia $C \subseteq V$, sia $v_0 \in V$.

Supponiamo che

- (i) $v_0 \notin C$
- (ii) C è convesso aperto
- (iii) C contiene l'origine.

Allora posso separare debolmente v_0 da C



Dim. Prendo la pseudo-norma associata a C .
Prendo il sottospazio $E \subseteq V$ definito come $\mathbb{R}v_0$.
Definisco $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(\alpha v_0) = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Osservo che f è lineare e verifica la stima

$$f(\alpha v_0) \leq p(\alpha v_0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

[Se $\alpha \leq 0$, allora è ovvia. Per $\alpha > 0$ devo dire che

$$f(v_0) \leq p(v_0)$$

" e sappiamo che $p \geq 1$ fuori da C]

HB fa il lavoro sporco e fornisce $\hat{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare che estende f e verifica

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \quad \forall v \in V$$

Questa $\hat{f}$ è la separazione cercata. Infatti

$$\hat{f}(v) \leq p(v) < 1 = f(v_0) \quad \forall v \in C$$

Manca la continuità, ma questa segue da

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

[Applicandola con v e $-v$ la ottengo con il valore assoluto al LHS].

Prop. 1 Sia V sp. norm., sia $C \subseteq V$, sia $v_0 \in V$ t.c.

(i) C è convesso e aperto

(ii) $v_0 \notin C$

Allora esiste separazione debole di v_0 da C

Dim. Prendiamo $w_0 \in C$ e poniamo

$$\tilde{C} := C - w_0$$

$$\tilde{v}_0 := v_0 - w_0$$

Questi ricadono nelle ipotesi della Prop. 0

Dim. Teo. sep. debole

$$A \cap B = \emptyset$$

A convesso aperto

B convesso

Introduco $C := A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$

Si verifica che

- C è convesso e aperto (unione di traslati di A)

- $0 \notin C$

Ma allora posso separare 0 da C , cioè $\exists f \in V'$ t.c.

$$0 = f(0) < f(a - b), \text{ cioè}$$

$$f(b) < f(a) \quad \forall b \in B \quad \forall a \in A$$

Dim. teo. sep. forte

$$A \cap B = \emptyset$$

A convesso compatto

B convesso chiuso

Li ε -allargo ponendo

$$A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon)$$

$$B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon)$$

Per $\varepsilon > 0$ piccolo sono disgiunti. Diciamo per $\varepsilon = \frac{1}{n}$
con n grande.

Se non fosse così, avrebbero un elemento in comune

$$\underbrace{a_m}_{\in A} + \underbrace{z_m}_{\in B(0, \frac{1}{n})} = \underbrace{b_m}_{\in B} + \underbrace{w_m}_{\in B(0, \frac{1}{n})} \quad \text{per } \infty \text{ valori di } n$$

Essendo A compatto

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty$$

Ma allora pure

$$b_{n_k} \rightarrow a_\infty$$

$$b_m = \underbrace{a_m}_{\downarrow 0} + \underbrace{z_m}_{\downarrow 0} - \underbrace{w_m}_{\downarrow 0}$$

Essendo A_ε e B_ε disgiunti e aperti, ci posso
separare debole

$$f(a + \varepsilon_0 v) < f(b + \varepsilon_0 w)$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$$\forall v \in B(0, 1)$$

$$\forall w \in B(0, 1)$$

Per dim. che la sep. è stretta prendo $v_0 \in B(0, 1)$ con
 $f(v_0) > 0$, prendo un reale c che sta nella separazione
dei due insiemi

$$f(a) = f(a + \varepsilon_0 v_0 - \varepsilon_0 v_0) = f(a + \varepsilon_0 v_0) - \varepsilon_0 f(v_0) \leq c$$

$$f(b) = f(b - \varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_0 v_0) = f(b - \varepsilon_0 v_0) + \varepsilon_0 f(v_0) \geq c$$