

CONVERGENZA DEBOLE E DEBOLE *

(convergenza, non TOPOLOGIA)

Def. Sia V sp. normato, sia V' il duale topologico (è sempre Banach)(1) Sia $\{u_n\} \subseteq V$ una succ. e sia $u_\infty \in V$.Si dice che $u_n \rightarrow u_\infty$ (debole) se

$$f(u_n) \rightarrow f(u_\infty) \quad \forall f \in V'$$

 $\uparrow$ conv. di numeri(Brutalmente: negli sp. normati gli el. di V' sono in un certo senso le componenti di un vettore)(2) Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ una succ. e sia $f_\infty \in V'$.Si dice che $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$ (debole*) se

$$f_n(u) \rightarrow f_\infty(u) \quad \forall u \in V$$

 $\uparrow$ conv. di numeri

(si tratta della conv. puntuale di analisi 2)

Proprietà semplici

- Unicità del limite
- Linearità
- Forte $\Rightarrow$ debole

} quasi ovvie

[Dim. unicità per il limite debole] Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty$$

$$u_n \rightarrow \hat{u}_\infty$$

$$f(u_n) \rightarrow f(u_\infty)$$

$$f(u_n) \rightarrow f(\hat{u}_\infty) \quad \forall f \in V'$$

Basta trovare $f \in V'$ t.c. $f(u_\infty) \neq f(\hat{u}_\infty)$, cioè

$$f(u_\infty - \hat{u}_\infty) \neq 0$$

Basta prendere $f :=$ funzione allineata con $u_\infty - \hat{u}_\infty$.

[Abbiamo usato HB, cioè CA!]]

TEOREMA (Sci della norma)

Sia V sp. normato, sia V' il duale top.

(1) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ in V , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_V \geq \|u_\infty\|_V$$

(2) Se $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$ in V' , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{V'} \geq \|f_\infty\|_{V'}$$

Dim. (1) Serve la caratt. duale della norma. Per ogni $f \in V'$ con $\|f\|_{V'} \leq 1$ vale

$$|f(u_n)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u_n\|_V \leq \|u_n\|_V$$

e quindi

$$|f(u_\infty)| \overset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{conv. debole}}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f(u_n)| \overset{\substack{\downarrow \\ f(u_\infty)}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_V$$

Si conclude osservando che $\|u_\infty\|_V = \sup_{\max} \text{LHS su } \|f\|_{V'} \leq 1$.

[In realtà basterebbe fare il conto con funz. allineato con u_∞]

(2) Per ogni $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ vale

$$|f_n(u)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|u\|_V \leq \|f_n\|_{V'}$$

da cui

def. conv. $\xrightarrow{*}$

$$|f_\infty(u)| \overset{\downarrow}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(u)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{V'}$$

Ora $\|f_\infty\|_{V'}$ è il sup del LHS su tutti i $\|u\|_V \leq 1$.

TEOREMA (Compattezza debole * delle palle del duale)

Sia V sp. normato, sia V' il duale, sia $\{f_n\} \subseteq V'$ una succ.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|f_n\|_{V'} \leq M$
per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(ii) V sia separabile.

Allora $\{f_n\}$ ammette s.succ. debole * convergente $f_{n_k} \xrightarrow{*} f_\infty$.

Achtung! Non c'è un "duale" di questo teorema in V .

Dici Prendiamo $D \subseteq V$ denso e numerabile.

Per ogni $d \in D$ osserviamo che

$$|f_n(d)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|d\|_V \leq M \cdot \|d\|_V$$

quindi volendo esiste una s.succ. conv.

Essendo D numerabile, esiste f_{n_k} tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(d) \text{ esiste per ogni } d \in D$$

" $f_\infty(d)$

Per il momento $f_\infty: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Voglio dim. che $f_{n_k}(v)$ converge per ogni $v \in V$, senza ulteriori s.succ.

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(v) - f_{n_q}(v)| &\leq |f_{n_k}(v) - f_{n_k}(d)| \leq M \|v - d\|_V \\ &\quad + |f_{n_k}(d) - f_{n_q}(d)| \\ &\quad + |f_{n_q}(d) - f_{n_q}(v)| \leq M \|v - d\|_V \end{aligned}$$

Formalmente:

- ci viene dato $\varepsilon > 0$
- Scegliamo $d \in D$ t.c. 1ª e 3ª riga $\leq \frac{1}{4} \varepsilon$
- visto il d , scegliamo $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. 2ª riga $\leq \frac{1}{4} \varepsilon$ appena $k, k \geq k_0$
- questo mostra che $\{f_{n_k}(v)\}$ è di Cauchy, quindi ha un limite che chiamiamo $f_\infty(v)$.

Ora abbiamo def. $f_\infty : V \rightarrow \mathbb{R}$. Sta in V' ?

Questo è vero perché

→ Dim. puntuale di lineari è lineare

→ " " " M -lip è M -lip.

— o — o —

Oss. Dove si incazza la dim. se dualizzo tutto?

$D \subseteq V'$ denso. Per ogni $f \in V'$ vale $f(u_n)$ limitata, quindi

$$f(u_{n_k}) \rightarrow \text{q.c.} \quad \forall f \in D$$

↑
dovrebbero essere $f(u_\infty)$. Voglio trovare un vettore con un po' di sue "componenti"

Mettiamo anche che $f(u_{n_k}) \rightarrow \text{q.c.} \quad \forall f \in V'$.

Nessuno mi dice che esiste un vettore t.c. $\text{q.c.} = f(u_\infty)$.

Finestra sul futuro: posso dire che $\text{q.c.} \in (V')'$ e vomei tanto che questo fosse $V \dots$

— o — o —

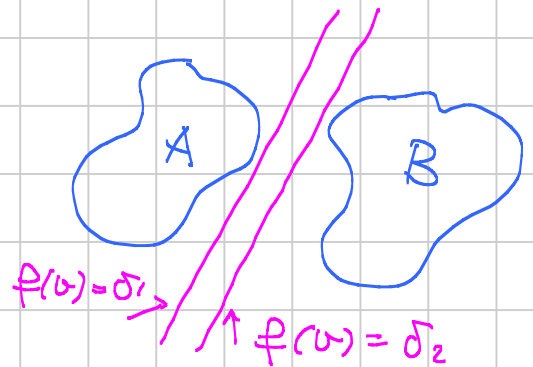
SEPARAZIONE MEDIANTE IPERPIANO

Def. Siano V e V' come sempre, siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq V$

• Si dice che $f \in V'$ separa debolmente A e B se
$$f(a) < f(b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

• Si dice che $f \in V'$ separa strettamente A e B se
esistono $\delta_1 < \delta_2$ t.c.

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq f(b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$



Teorema 1 (Separazione debole) (1ª forma geom. di HB)

Sia V, V', A, B come nella def.

Supponiamo che

(i) $A \cap B = \emptyset$

(ii) A convesso aperto

(iii) B convesso

Allora esiste una separazione debole

Teorema 2 (Separazione stretta) (2ª forma geom. di HB)

Siano V, V', A, B come nella def.

Supponiamo che

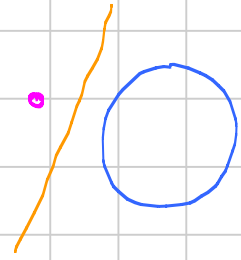
(i) $A \cap B = \emptyset$

(ii) A convesso compatto

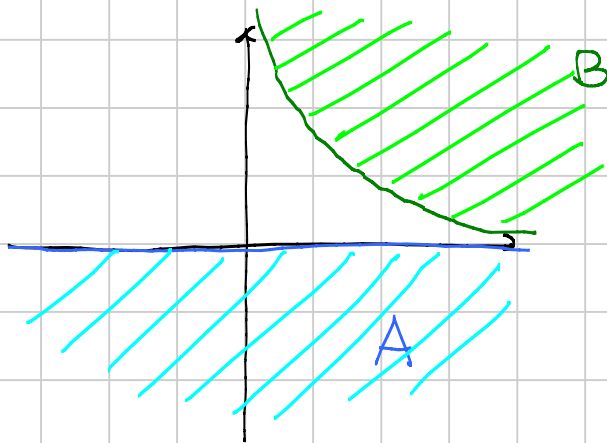
(iii) B convesso chiuso

Allora esiste una separazione stretta.

Corollario teo. 2 Esiste sempre separazione stretta tra un p.to ed un convesso chiuso che non lo contiene.



Oss. Non bastano due convessi chiusi per avere separazione stretta, nemmeno in $\mathbb{R}^2$



Una separazione debole esiste ed è data da $f(x,y) := y$