

Oss 1 In uno spazio di Hilbert H , un (ma presto sarà il) funzionale allineato è

$$f(v) = \frac{1}{\|v_0\|} \langle v, v_0 \rangle \quad \forall v \in H$$

(almeno se $v_0 \neq 0$)

Oss 2 Il funzionale allineato NON è nec. unico

Esempio classico $V = \mathbb{R}^2$ con la norma 1

$$\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$$

$v_0 = (1, 0)$ e scopriamo che ci sono almeno 2 funz. all.

$$f_1(x, y) = x$$

$$f_1(1, 0) = 1 = \|(1, 0)\|_1$$

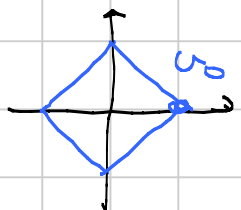
$$|f_1(x, y)| = |x| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$$

$$f_2(x, y) = x + y$$

$$f_2(1, 0) = 1 ; \quad |f_2(x, y)| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$$

Anche $f_2(x, y) = x + \alpha y$ è allineato se $|\alpha| \leq 1$

La NON unicità dipende dal fatto che la palla unitaria ha "un angolo" in v_0



SPAZI DI APPLICAZIONI LINEARI CONTINUE

Def. Siano V e W sp. normati.

Si indica con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme delle funzioni $f: V \rightarrow W$ lineari e continue.

Def. Per ogni $f \in \mathcal{L}(V, W)$ si pone

$$\|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup \{ \|f(v)\|_W : v \in V \text{ e } \|v\|_V = 1 \}$$

è il famoso M di (iii)

cioè la costante di Dip. di f

Prop. Siano V, W e $\mathcal{L}(V, W)$ come sopra.

Allora

(1) $\mathcal{L}(V, W)$ è uno sp. vett. e quella definita è una norma

(2) Vale la stima

$$\|f(v)\|_W \leq \|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

(3) Se W è sp. di Banach, allora $\mathcal{L}(V, W)$ è Banach.

Dim. (1) Facile esercizio

(2) Idem

(3) Prendo $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(V, W)$ succ. di Cauchy.

Devo dim. che $f_n \rightarrow f_\infty$ in $\mathcal{L}(V, W)$

Prima devo definire f_∞ . Dato $v \in V$, grazie alla (2) scopro che $\{f_n(v)\}$ è di Cauchy in W

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_W = \|(f_n - f_m)(v)\|_W$$

$$(2) \nearrow \leq \underbrace{\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)}}_{\text{piccolo se } n, m \text{ grandi}} \cdot \|v\|_V$$

Essendo W sp. di Banach $f_n(u) \rightarrow \text{qualcosa} =: f_\infty(u)$
Per il momento è conv. puntuale, che basta per
garantire che f_∞ è lineare.

Basta anche per garantire che f_∞ è continua, perché
(fatto generale) il limite puntuale di funzioni
equi-lip. è lip.

Senza la conv. rispetto alla norma di $\mathcal{L}(V, W)$.

- Ci viene dato $\varepsilon > 0$
- Scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \varepsilon$
per ogni $n, m \geq n_0$
- Per ogni $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ vale

$$\|f_n(u) - f_m(u)\|_W \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|u\|_V \leq \varepsilon$$

se n, m sono $\geq n_0$

- Mandando $m \rightarrow \infty$ e ottenendo

$$\|f_n(u) - f_\infty(u)\|_W \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall u \text{ con } \|u\| \leq 1$$

- Facendo il sup su tutti i u con $\|u\|_V \leq 1$ ottenendo

$$\|f_n - f_\infty\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

— o — o —

Oss. Il sup nella def. di norma in $\mathcal{L}(V, W)$ può non
essere un max.

Esempio 1 $W = \mathbb{R}$, $V := \{u \in C^0([0, 1]) : u(0) = 0\}$
con la norma del sup.

V è un Banach. Definisco $f: V \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(u) := \int_0^1 u(x) dx$$

Si vede che f è 1-lip., ma non esiste $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ tale che $f(u) = 1$ (dovrebbe essere $u \equiv 1$)

Esempio 2 $V = W = H = L^2(0,1)$ $A: H \rightarrow H$ def. da

$$(Au)(x) := xu(x) \quad \forall u \in H$$

Si vede che A è lineare e 1-lip (serve $x^2 \leq 1$)
ma la costante non si realizza mai.
— 0 — 0 —

Def. (Duale topologico) Sia V sp. normato
Si definisce duale (topologico) V' l'insieme delle applic.
 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e continue. Si indica con V' .

Oss. Si tratta di $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ con norma

$$\|f\|_{V'} := \sup \{ |f(v)| : v \in V \text{ e } \|v\| \leq 1 \}$$

Osservo che V' è sempre un Banach, anche se V non lo era (prop. di prima con $W = \mathbb{R}$).

Caratterizzazione duale della norma

Sia V sp. normato, e sia V' il suo duale (topologico).
Allora per ogni $v \in V$ vale

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sup \{ |f(v)| : f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} \leq 1 \} \\ &= \max \{ \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \boxed{\geq} \quad |f(v)| \leq \underbrace{\|f\|_{V'}}_{\leq 1} \cdot \|v\|_V \leq \|v\|_V$$

$\boxed{\leq}$ (ed esistenza max) è il funzionale allineato

Tutte le dim. per dualità di analisi 2 passano dalla caratt. duale della norma

Esercizio Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ integrabile (anche continua su una palla)
Allora

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

Ad analisi 2 di solito si dimostra per la norma euclidea.
Ma vale per altre norme?

Sia $\|\cdot\|$ una norma qualunque in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ lineare vale

$$L\left(\int_{\Omega} f(x) dx\right) = \int_{\Omega} L(f(x)) dx \quad (\text{sono numeri})$$

[Questo segue da $L(x) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_d x_d$]

Ma allora se $\|L\|_{V'} \leq 1$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| L\left(\overbrace{\int_{\Omega} f(x) dx}^{\text{vettore}}\right) \right| &= \left| \int_{\Omega} L(f(x)) dx \right| \\ \uparrow \text{val. absol. di un numero} & \\ &\leq \int_{\Omega} |L(f(x))| dx \\ \text{disug. Analisi 1} \uparrow & \\ &\leq \int_{\Omega} \underbrace{\|L\|_{V'}}_{\leq 1} \|f(x)\|_V dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_V dx \end{aligned}$$

Facciamo il sup su L al LHS trovo $\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\|_V$.

Oss. Tutta la parte iniziale di Analisi 2 si può enunciare tra spazi normati!

Ad esempio la nozione di diff. $f: V \rightarrow W$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + L(R) + o(\|R\|)$$

$\uparrow$ elemento di $\mathcal{L}(V, W)$

Se x e y sono punti di V , allora

$$\|f(y) - f(x)\|_W \leq \|y - x\|_V \|L(c)\|_{\mathcal{L}(V, W)}$$

$\uparrow$
p.to esistente nel
segmento di estremi
 x e y .

Dim. Stessa di Analisi 2. Si parte considerando

$$\Delta (f(y) - f(x))$$

al variare di Δ in W' con $\|\Delta\|_{W'} \leq 1$.

— 0 — 0 —