

TEOREMA DI BROUWER

Sia $d \geq 1$ intero. Sia $\bar{B}$ la palla chiusa in $\mathbb{R}^d$ con centro in o e raggio 1.

Sia $f: \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ continua.

Allora f ammette almeno un pto fisso.

Dim. Corsi di geometria.

Questo vale solo in dimensione finita

Brouwer più generale

Sia $d \geq 1$ intero. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^d$ convesso e chiuso e limitato.

Sia $f: C \rightarrow C$ continua.

Allora f ammette almeno un pto fisso

Dim.

Sia $\bar{B}$ una palla chiusa che contiene C . Sia $P: \bar{B} \rightarrow C$ la proiezione (esiste perché proiezione su convesso chiuso).

Considero $\hat{f}(x) = f(P(x)) : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$

Questa ha almeno un pto fisso $x \in \bar{B}$ che in realtà sta in C perché $x = \hat{f}(x) \in C$.

Oss. Sarebbe davvero che C sia chiuso e limitato?

No: basta che C sia convesso e

$$f: C \rightarrow K \subseteq C$$

↑
compatto

[Aggiunto dopo video: questa versione + generale (comunque vera, una dimostrata usando Carathéodory) non serve dopo. Nella dim. di Schauder basta considerare le restrizioni $\hat{f}_n: K_n \rightarrow K_n$ e ricordare che K_n è involucro convesso di un numero FINITO di punti di K , dunque convesso, compatto e $\subseteq C$].

Dim Prendiamo $\bar{B}$ che contiene K . Consideriamo $\bar{B} \cap C$: questo è convesso e definiamo

$$\hat{f}(x) := f(P_{C \cap \bar{B}}(x)) \quad \forall x \in C \cap \bar{B}$$

e tutto funziona come prima se C è chiuso.
 Non serve la chiusura di C se lo sostituisco con
 l'involuppo convesso di K , che è un compatto $\subseteq C$ (sembra
 che senza che ogni pto nell'involuppo convesso è comb. conv.
 di $d+1$ pti. [https://en.wikipedia.org/wiki/Carath%C3%A9odory%27s_theorem_\(convex_hull\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Carath%C3%A9odory%27s_theorem_(convex_hull))

— o — o —

↑ [Referenza aggiunta dopo video]

TEOREMA DI SCHAUDER

Consideriamo

$$\begin{array}{ccccc} K & \subseteq & C & \subseteq & Y \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{compatto} & & \text{convesso} & & \text{sp. normato} \end{array}$$

Sia $f: C \rightarrow K$ continua.

Allora f ammette almeno un pto fisso.

Dim Idea: approssimo f come nel teo. di approx. e
 sfruttando che le approssimanti hanno pti fissi.

Per il teo. di approssimazione, esistono

$Y_n \subseteq Y$ s.sp. di dim. finita

$K_n \subseteq C \cap Y_n$ compatti

$f_n: C \rightarrow K_n$ continue

tali che $f_n \rightarrow f$ unif. in C

Considero $C \cap Y_n =: C_n$ e

$$\hat{f}_n: C_n \rightarrow K_n \subseteq C_n \quad (\text{tutto contenuto in } Y_n)$$

che sono le restrizioni delle f_n

Quindi per il Brouwer finito dimensionale, tutte le $\hat{f}_n$ hanno almeno un p.to fisso, cioè

$$f_n(x_n) = x_n \quad x_n \in C_n \subseteq C$$

Ora $f(x_n) \in K$, quindi a meno di s.succ.

$$f(x_{n_k}) \rightarrow y_\infty$$

Dico che y_∞ è un p.to fisso per f .

SE dimostro che $x_{n_k} \rightarrow y_\infty$ ho finito, perché

$$f(y_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SE}}}{=} f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ cont.}}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } y_\infty}}{=} y_\infty$$

$$\|x_{n_k} - y_\infty\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } x_{n_k}}}{=} \|f_{n_k}(x_{n_k}) - y_\infty\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \underbrace{\|f(x_{n_k}) - y_\infty\|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per def. di } y_\infty}} \\ &\leq \sup_{x \in C} \|f_{n_k}(x) - f(x)\| \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0 \text{ per conv. unif.} \\ &\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} \end{aligned}$$

Oss. Controllare SE e DOVE serve la completezza di Y .
 --- 0 --- 0 ---

Teorema di sola esistenza per eq. diff. $\dot{u} = f(t, u)$

3 tipi di dim:
 → approssimando f con f_n Lip
 → approssimando l'eq. stile Tonelli
 → via Schauder

Dim. Setting: $\dot{u} = f(t, u)$ $u(t_0) = u_0$
 $t_0 \in \mathbb{R}$ $u_0 \in \mathbb{R}^k$

$$f: \underbrace{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(u_0, r)}_R \quad \delta > 0 \quad r > 0$$

$$M := \sup \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

Sia δ_0 t.c. $\delta_0 \leq \delta$ e $M\delta_0 < r$

Tesi: esiste una soluzione $u: [t_0, t_0 + \delta_0] \rightarrow \overline{B}(u_0, r)$

Risolvere l'equazione + dato iniziale è equiv. a trovare un p.to fisso per l'operatore di Volterra

$$[\Phi(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Dal momento che la soluzione può non essere unica, il teo. delle contrazioni non si può usare.

Considero

$$Y := \{ u \in C^0([t_0, t_0 + \delta_0], \mathbb{R}^k) \}$$

con la norma del sup.

Questo è uno sp. normato (e se serve pure completo)

$$C := \{ u \in C^0([t_0, t_0 + \delta_0], \overline{B}(u_0, r)) \}$$

Questo è convesso (e se serve anche chiuso)

$$K := \{ u \in C : u \text{ è lip. con costante } \leq M \}$$

Questo è compatto per Ascoli - Arzelà

Basta dimostrare che $\Phi : C \rightarrow K$ ed è continua

- Il fatto che $\Phi : C \rightarrow C$ segue dal fatto che $M\delta_0 \leq 2$ (vedi analisi 2)

- Il fatto che $\Phi(u) \in K$ segue dal fatto che la derivata di $\Phi(u)$ esiste e sta in $[-M, M]$

- La continuità di Φ segue dal fatto che

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } Y \Rightarrow u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta]$$

$$\Rightarrow f(t, u_n(t)) \rightarrow f(t, u_\infty(t)) \text{ unif. (analisi 2)}$$

$\Rightarrow$ le primitive convergono unif.

Per Schauder Φ ammette almeno un pto fisso.

— o — o —

Morale : gli operatori che "regolarizzano" tendono ad essere compatti

Esempio $H = L^2((0,1))$ e considero la primitiva

$$(Af)(x) := \int_{\frac{1}{3}}^x f(s) ds \quad \forall f \in H$$

Si vede che $A : H \rightarrow H$ ed è lineare

Dico che è compatto. (Moralmente: regolarizza!)

$\{f_n\} \subseteq H$ limitata. Allora $\{Af_n\}$ sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder e quindi per A.A. ammettono s.succ. conv. unif.

quindi a maggior ragione in L^2 .

Idem se $A : L^{2018} \rightarrow L^{8102}$.