

Approssimazione di operatori compatti

Idea: approx. operatore compatto mediante operatori che hanno immagine di dim. finita

Prop. 1 (limite unif. di op. compatti è compatto)

Sia X sp. normato, sia Y metrico, sia $f_n: X \rightarrow Y$ e sia $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f_n è cpt. per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati di X ,

(iii) Y è completo

Allora f_∞ è cpt.

Dim. Sia $A \subseteq X$ limitato. Devo dim. che $f_\infty(A)$ è rel. cpt.

Essendo Y completo, basta dim $f_\infty(A)$ tot. Dim.

Idea: $f_\infty(A)$ è vicino a $f_n(A)$, il quale è tot. Dim.

• Ci viene dato $\epsilon > 0$

• Scelgo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $d_Y(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \frac{1}{2} \epsilon \quad \forall x \in A$
(posso per conv. unif.)

• Essendo $f_n(A)$ tot. Dim., esistono $y_1, \dots, y_k \in Y$ t.c.

$$f_n(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2} \epsilon)$$

Dipendano da n ,
il quale è scelto
una volta per
tutte.

• Per la triangolare

$$f_\infty(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$$

[$\epsilon = \epsilon$ dopo video]

Esercizio Mostrare che le 3 ipotesi servono.

Teorema (Approx. op. compatti negli Hilbert separabili)

Sia X normato, sia H Hilbert separabile, sia $\{e_n\}$ base ortonormale, sia $f: X \rightarrow H$ op. compatto, sia

$H_n = \text{Span}(e_1, \dots, e_n)$, sia $P_n: H \rightarrow H_n$ la proiezione.

Poniamo

$$f_n(x) := P_n(f(x)) \quad \forall x \in X$$

Allora $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati.

Inoltre

- Se f è lineare, allora anche f_n è lineare
- " " continua, " " continua

Dim. Si tratta di far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $A \subseteq X$ limitato, esiste n tale che

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

- Ci vengono dati A ed ε
- Essendo $f(A)$ relativamente compatto, troviamo $y_1, \dots, y_k$ in H tali che

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

- Essendo $\text{Span}(e_1, \dots, e_n, \dots)$ denso, possiamo trovare

$$z_i \in B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \quad \text{con } z_i \in \underbrace{\text{Span}(e_1, \dots)}_{\text{comb. lin. finite}}$$

- In questo modo avremo che

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(z_i, \varepsilon)$$

- Esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $z_i \in H_n$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

• Considero la $f_n(x) = P_n(f(x))$ e osservo che

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|P_n(f(x)) - f(x)\|$$

$$\leq \text{dist}(f(x), H_n)$$

$$\leq \varepsilon \quad (\text{perch}\acute{\text{e}} \text{ c'}\acute{\text{e}} \text{ uno degli } z_i \text{ che dista meno di } \varepsilon \text{ da } f(x))$$

per ogni $x \in A$

— o — o —

Oss. Ci sono esempi pensati in cui l'approx. non funziona negli spazi di Banach.

[Aggiunto dopo video: la frase forse non si capisce. Volevo dire: nei Banach esistono operatori lineari che non si approssimano con operatori LINEARI a valori in s.sp. di dim. finita. Quindi bisogna ricorrere ad approssimazioni NON LINEARI, cosa che svilupperemo nel seguito].

Teorema (Approx. non lineare)

Consideriamo

$$\begin{array}{ccccc} K & \subseteq & C & \subseteq & Y \\ \nearrow \text{compatto} & & \uparrow \text{convesso} & & \uparrow \text{sp. normato} \end{array}$$

Sia $f: C \rightarrow K$ (così è automaticamente compatta)

Allora esistono $Y_n \subseteq Y$ s.sp. di dim. finita

$K_n \subseteq Y_n \cap C$ compatti

$f_n: C \rightarrow K_n$

tali che

$$f_n \rightarrow f \text{ unif. in } C$$

Se inoltre f è continua, allora f_n è continua

[Non vale che f lineare $\Rightarrow f_n$ lineare]

— o — o —

Lemma (Proiezione non lineare)

Sia

$$K \subseteq C \subseteq Y$$

$\nearrow$ compatto $\uparrow$ convesso $\uparrow$ sp. normato

Sia $\varepsilon > 0$.

Allora esistono un s.sp. $Y_\varepsilon \subseteq Y$ di dim. finita

$$K_\varepsilon \subseteq C \cap Y_\varepsilon \text{ compatto}$$

$$P_\varepsilon: K \rightarrow K_\varepsilon$$

tale che

$$\|P_\varepsilon y - y\| \leq \varepsilon \quad \forall y \in K$$

Dim. Ci viene dato $\varepsilon > 0$.

Essendo K tot. limitato,

troviamo $y_1, \dots, y_k$ in K tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon) =: A_\varepsilon$$

$\uparrow$ aperto

$$\text{Pongo } Y_\varepsilon := \text{Span}(y_1, \dots, y_k)$$

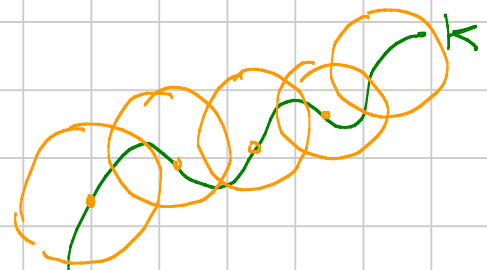
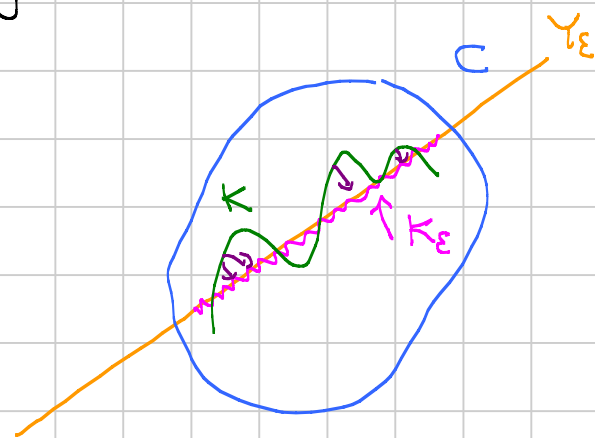
Per ogni $i = 1, \dots, k$ definisco la funzione CONETTO

$$c_i(y) := \max \{ 0, \varepsilon - \|y - y_i\| \}$$

$$\text{Osservo che } \sum_{i=1}^k c_i(y) > 0 \text{ in } A_\varepsilon$$

e pongo

$$\lambda_i(y) := \frac{c_i(y)}{\sum_{i=1}^k c_i(y)} \in [0, 1]$$



$c_i(y)$



Osservo che $\lambda_i(y)$ è ben definita in A_ε , dunque in K , e vale

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(y) = 1 \quad \forall y \in K$$

Pongo infine

$$P_\varepsilon(y) := \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) y_i \quad (\text{comb. convessa di } y_i)$$

Osservo che

- P_ε assume valori in Y_ε ed in C , quindi in $Y_\varepsilon \cap C$
- L'immagine di P_ε è contenuta nell'inviluppo convesso di un numero finito di p.ti, e questo è un K_ε compatto
- verifico che per ogni $y \in K$ vale

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon y - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) y_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) y \right\| \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \sum \lambda_i = 1 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) (y_i - y) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) \underbrace{\|y_i - y\|}_{\leq \varepsilon \text{ quando } \lambda_i(y) \neq 0} \\ &\leq \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i(y)}_{=1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dim. Approx. non lineare

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ applico il lemma con $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Trovo s.sp. $Y_m \subseteq Y$ di dim. finita, e trovo

$$P_m : K \rightarrow K_m \subseteq C \cap Y_m$$

e pongo

$$f_m(x) := P_m(f(x))$$

Per costruzione l'immagine di f_n è contenuta in un cpt. $K_n \subseteq Y_n \cap C$.

Devo verificare la conv. unif.

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|P_n(f(x)) - f(x)\| \leq \frac{1}{n}$$

↑
perché $f(x) \in K$
e la proiezione P_n
ha questa proprietà.

— o — o —

Oss. Sia $\{e_n\}$ base ortonormale in Hilbert separabile.

Sia $f: H \rightarrow H$ lineare con

$$f(e_n) = \lambda_n e_n$$

Allora f è compatta se e solo se $\lambda_n \rightarrow 0$

Dim. $\Rightarrow$ è il discorso che posso usare e_n come succ. dim. e $\lambda_n e_n$ deve avere s. succ. di Cauchy

$\Leftarrow$ in questo caso è facile vedere che è limite uniforme sui cpt. delle proiezioni finito dimensionali.

— o — o —