

Dim. che il max di $|q(x)|$ è autovalore

Uso la prima caratt. come $\max \left\{ \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2} : x \in V, x \neq 0 \right\}$

Sia x_0 un p.to di max per $|q(x)|$. Assumo wlog che sia p.to di max per $q(x)$.

Pongo $\varphi(t) = q(x_0 + tv)$ con $v \in V$

Questa deve avere $\varphi'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\langle A(x_0 + tv), x_0 + tv \rangle}{\|x_0 + tv\|^2} \\ &= \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle + 2t \langle Ax_0, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle}{\|x_0\|^2 + 2t \langle x_0, v \rangle + t^2 \|v\|^2} \end{aligned}$$

Faccio la derivata

$$\varphi'(t) = \frac{(2 \langle Ax_0, v \rangle + 2t \langle Av, v \rangle) \cdot \text{Den} - (2 \langle x_0, v \rangle + 2t \|v\|^2) \cdot \text{Num}}{\text{Den}^2}$$

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \langle Ax_0, v \rangle \|x_0\|^2 - \langle x_0, v \rangle \langle Ax_0, x_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle Ax_0 - \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$\in V$ perché V è A -invariante

Quindi deve essere 0, cioè

$$Ax_0 = \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

$q(x_0)$ ed è autovalore

— 0 — 0 —

Oss. Si poteva dimostrare usando $\max \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\|=1 \}$
usando i moltiplicatori di Lagrange
(l'autovalore diventa proprio il moltiplicatore di Lagrange)
— 0 — 0 —

Ripasso geometria 1

- ① Per op. simm., gli autovett. con autovalori diversi sono ortogonali

[Se $Au = \lambda u$ e $Av = \mu v$, allora

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle]$$

- ② Se A è simm. e V è A -invariante, allora $V^\perp$ è A -invariante

[Sia $w \in V^\perp$. Allora per ogni $v \in V$

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, Av \rangle = 0 \Rightarrow Aw \in V^\perp]$$

↓_{V[⊥]} ↓_V
— 0 — 0 —

Enunciato completo del teo. spettrale

Ipotesi come sopra.

- ① Tesi di sopra (base di autovettori)

- ② Tutti gli autosp. hanno dim. finita (tranne eventualmente il ker)

- ③ Gli autovalori non nulli si possono sistemare in una succ. $\{\lambda_n\}$ con $|\lambda_n| \rightarrow 0$ se sono infiniti
(quindi l'insieme degli autovalori è limitato e l'unico possibile p.to di accumulazione è 0)

Dim. teo. spettrale L'idea è costruire una succ. $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ di autovalori non nulli con $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ e una succ. di sottospazi $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$ in modo che

λ_k massimizza $|q(x)|$ in $V_k \setminus \{0\}$.

- Passo base: $V_1 := H$ e $|\lambda_1|$ che massimizza $q(x)$ in $V_1 \setminus \{0\}$.
Scego un autovettore u_1 con $\|u_1\| = 1$.
- Pongo $V_2 = \{x \in H : \langle x, u_1 \rangle = 0\}$
Oservo che è chiuso e A -invariante e trovo λ_2 e u_2 .
- Supposto di aver trovato $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, pongo

$$V_{k+1} = \{x \in H : \langle x, u_1 \rangle = \dots = \langle x, u_k \rangle = 0\}$$

e massimizzando su V_{k+1} trovo λ_{k+1} e u_{k+1} .

Se strada facendo il max è $\neq 0$, allora ok.

Se strada facendo trovo 0, vuol dire che ciò che rimane è il ker.

In ogni caso fino a quel punto $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

→ Caso facile: se ad un certo pto $V_k = \ker A$, allora prendo una base ortonormale del ker e ho finito.

→ Altrimenti dico che $|\lambda_k| \rightarrow 0$. Qui serve la compatt.

Supponiamo che $|\lambda_k| \geq \nu > 0$.

Siano u_k i risp. autovett., che per costruzione sono ortonormali. Ora $\{u_k\}$ è limitata, ma $Au_k = \lambda_k u_k$ quindi $\|Au_k - Au_l\|^2 = \|\lambda_k u_k - \lambda_l u_l\|^2 \geq 2\nu$

La dim. NON è finita: so che $\{v_k\}$ sono ortonormali, ma non so ancora che lo Span è denso.

Pongo

$$V_\infty := \{x \in H : \langle x, v_k \rangle = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots\}$$

Osservo che $V_\infty \subseteq V_k$ costruiti strada facendo, quindi

$$\max \{ |q(x)| : x \in V_\infty \setminus \{0\} \} \leq \max \{ |q(x)| : x \in V_k \setminus \{0\} \} = |\lambda_k|$$

Ma allora, poiché $|\lambda_k| \rightarrow 0$, V_∞ è il ker di A e quindi mi basta aggiungere ai $\{v_k\}$ una base di $\ker A$.

Così abbiamo base di H .

— 0 — 0 —

Esempio H Hilbert separabile con base $\{e_n\}$. Pongo

$$A e_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} e_n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

ed estendo per linearità. Questo è operatore compatto con ker di dim. infinita.

— 0 — 0 —

Fatto che si tende a trascurare: abbiamo usato che un sottoinsieme chiuso di un separabile è separabile

Questo è vero nei metrici, ma falso in generale nei topologici.

[Provare a fare dim. ed esempi]

— 0 — 0 —

L'ESEMPIO

L'esempio più classico di operatore compatto simmetrico è l'inverso del Laplaciano con DBC.

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ **LIMITATO**. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

(nel senso delle soluzioni deboli)

[Basta minimizzare $F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 + f(x)u : u \in H_0^1(\Omega)$]

L'applicazione $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definita ponendo $Af = u$ è un operatore simmetrico compatto

- Lineare è ovvio
- Simmetrico è Gauss - Green (in una variabile è l'integrazione per parti)

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = - \int_{\Omega} \langle Du, Dv \rangle = \int_{\Omega} u \cdot \Delta v$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
DBC DBC

- Compatto : regolarità + immersioni di Sobolev

— o — o —