

TEOREMA SPETTRALE (Versione BABY)

Geometria 1 Sia V sp. vett. di dim. finita con un prod. scalare

Sia $f: V \rightarrow V$ lineare e simmetrica, cioè

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall (v, w) \in V^2$$

Allora esiste base ortonormale di V costituita da autovettori di f .

Def. (Operatori compatti)

Sia X sp. normato, sia Y sp. metrico, sia $f: X \rightarrow Y$.

Diciamo che f è un operatore compatto se l'immagine di ogni sottoinsieme limitato in X è rel. cpt. in Y .

In termini di succ: se $\{x_n\} \subseteq X$ è limitata, allora $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ ammette s.succ. cow.

Def. (Operatori simmetrici)

Sia H sp. di Hilbert, sia $A: H \rightarrow H$ lineare.

Si dice che A è simmetrico se

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall (x, y) \in H^2$$

Teorema spettrale (per operatori compatti)

Sia H sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$.

Supponiamo che

(i) H è separabile e $\dim(H) = +\infty$

(ii) A è lineare e simmetrico

(iii) A è compatto

Allora esiste base ortonormale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ^{di H} costituita da autovettori di A .

Oss 1 In generale compatto $\neq$ continuo
(basta pensare a qualcosa che ha come immagine 2 p.ti)

Oss 2 L'ipotesi (iii) serve davvero nel teorema.

Esempio: $H = L^2(0,1)$ $A: H \rightarrow H$ definito da

$$(Af)(x) = x f(x) \quad \forall f \in H$$

Si vede facilmente che

- $A: H \rightarrow H$ è lineare
- A è simmetrico

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 x f(x) \cdot g(x) dx = \langle f, Ag \rangle$$

- A è 1-lipschitz

$$\|Af - Ag\|^2 = \int_0^1 \underbrace{x^2}_{\leq 1} (f(x) - g(x))^2 dx \leq \|f - g\|^2$$

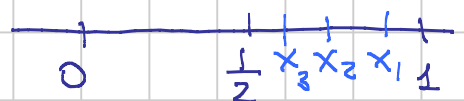
- Se f fosse un autovettore, sarebbe $Af = \lambda f$, cioè

$$x f(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in (0,1) \quad (\text{q.o.})$$

e questa è impossibile a meno che $f(x) = 0$ per q.o. x .

- Tocchiamo con mano che A non è compatto. Mi serve una succ. $\{f_n\} \subseteq L^2(0,1)$ limitata t.c. Af_n non ha s. succ. conv.

Prendiamo una succ. $x_n \searrow \frac{1}{2}$



Prendiamo $f_n(x) = c_n$ funzione caratt. di $[x_{n+1}, x_n]$

dove c_n è scelto in modo che $\|f_n\| = 1$.

Dico che Af_n non ha s.succ. di Cauchy

Infatti per $n \neq m$ vale

$$\begin{aligned}\|Af_n - Af_m\|^2 &= \|Af_n\|^2 + \|Af_m\|^2 + \underbrace{2\langle Af_n, Af_m \rangle}_{=0} \\ &\stackrel{||}{=} \int x^2 f_n(x)^2 \geq \frac{1}{4} \\ &\geq \frac{1}{4} \int f_n(x)^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \\ &\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}\end{aligned}$$

Prop. 1 (Compatto + lineare $\Rightarrow$ continuo S-S)

Sia X normato, Y normato, $A: X \rightarrow Y$ lineare e compatto.

Allora A è continuo S-S, cioè

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ in } X \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_\infty \text{ in } Y$$

Dim. Posso supporre wlog che $x_\infty = 0$ (qui si usa la linearità)

Quindi supponiamo $x_n \rightarrow 0$ e pure $x_n \neq 0$.

Allora $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ è limitata, quindi

$A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ è rel. compatta in Y , dunque è limitata in Y , cioè

$$\left\| A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\|_Y \leq M$$

Da questo segue che $\|Ax_n\|_Y \leq M \|x_n\|_X$ (ho usato di nuovo la linearità).

Concludo visto che $\|x_n\| \rightarrow 0$.

$$\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$$

Prop 2 (Lineare + compatto + simmetrico $\Rightarrow$ continuo w-s)

Sia H Hilbert, sia $A: H \rightarrow H$ con le 3 ipotesi L+C+S.
Allora

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ debole} \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_\infty \text{ forte}$$

Dim Wlog $x_\infty = 0$. So che $x_n \rightarrow 0$ e voglio $Ax_n \rightarrow 0$.
Per ogni $v \in H$ ho che

$$\langle Ax_n, v \rangle = \langle x_n, Av \rangle \rightarrow 0 \text{ per conv. debole}$$

Per compattezza sappiamo che $Ax_{n_k} \rightarrow y_\infty$. Ma allora da sopra

$$\langle y_\infty, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$$

e questo mi dice che $y_\infty = 0$.

Per il solito lemma della sotto-sotto, tutta $Ax_n \rightarrow 0$.

Oss. Abbiamo usato che le succ. conv. deboli sono limitate, quindi

$\rightarrow$ o lo aggiungiamo come ipotesi $x_n \rightarrow x_\infty + \{x_n\}$ lim.

(e ci basterà quando lo useremo)

$\rightarrow$ o aspettiamo di poterlo dedurre.

Def. (Quoziente di RAYLEIGH).

Sia H sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$ un operatore qualunque.
Poniamo

$$q(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$$

$$\forall x \in H \setminus \{0\}$$

Prop 3 (Proprietà del quoziente di Rayleigh)

Siano H Hilbert e $A: H \rightarrow H$ compatto, lin., simmetrico.
Allora valgono i seguenti fatti

(1) Esiste

$$\begin{aligned} \max \{ |q(x)| : x \in H \setminus \{0\} \} &= \max \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1 \} \\ &= \max \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

(2) Il max è un autovalore di A

(3) I p.ti di max sono gli autovettori

(1-bis) Vale lo stesso se mi restringo ad un sottospazio $V \subseteq H$ che sia chiuso e A -invariante, cioè
 $Av \in V \quad \forall v \in V.$ (rett.)

Dim. $q(x)$ è o-homogeneo, quindi radiale. Da questo segue subito che

$$\begin{aligned} \sup \{ |q(x)| : x \in V \setminus \{0\} \} &= \sup \{ |q(x)| : x \in V \text{ e } \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in V \text{ e } \|x\| = 1 \} \\ &\leq \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in V, \|x\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

Verifico che l'ultimo è uguale. Sia $\|x\| < 1$ con $|\langle Ax, x \rangle| > 0$, allora ponendo $y = \frac{x}{\|x\|}$ vediamo che

$$|\langle Ay, y \rangle| = \frac{1}{\|x\|^2} |\langle Ax, x \rangle| > |\langle Ax, x \rangle|$$

i p.ti di max non possono essere interni

Quindi i 3 sup coincidono. Basta che uno dei 3 sia max

Lo dimostro per il terzo. Sia $\{x_n\}$ succ. supizzante.
Sappiamo che $\|x_n\| \leq 1$, quindi ammette s. succ.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

Per sci della norma $\|x_\infty\| \leq 1$, quindi è un buon compete-
titore. Ora sappiamo che $Ax_{n_k} \rightarrow Ax_\infty$ (Prop. 2)

$$\begin{array}{ccc} \langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle & \rightarrow & \langle Ax_\infty, x_\infty \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ax_\infty & & x_\infty \end{array}$$

Resta da dim. che $x_\infty \in V$ se gli $x_n \in V$.

Questo è vero perché V è chiuso forte per ipotesi e
converso, quindi chiuso debole.

Oss. Abbiamo dim. la caratt. variazionale degli
autovalori.

Oss. Non abbiamo mai detto che $q(x)$ ammette
max / min in $H \setminus \{0\}$.

(Fare un esempio in cui uno dei 2 non esiste).

— o — o —