

Teorema di regolarità fino al bordo nel caso di DBC

Noi sappiamo che vale in $\mathbb{R}_+^d$: se $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ e $f \in L^2(\mathbb{R}_+^d)$, allora

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq C(d) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$$

Dim. Basta usare i rapp. curv. invece delle derivate seconde nelle stime a priori del caso regolare

Oss. Questo vale per l'eq. $\Delta u = f$, ma anche per l'eq. + generale

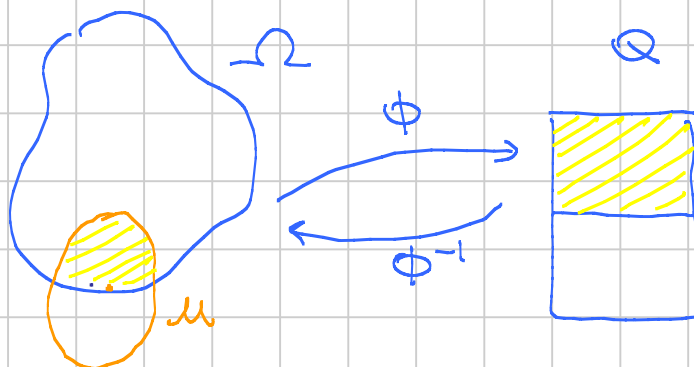
$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

con $A(x)$ matrice unif. ellittica e $C^1(\overline{\mathbb{R}_+^d})$.

Consideriamo ora aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $\partial\Omega$ compatta e C^2 . Voglio ottenere lo stesso risultato: se $\Delta u = f$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \{ \|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1} \}$$

Dim.



Step 1 Ricopri $\partial\Omega$ con numero finito di aperti, consideriamo la part. dell'unità come un insieme di estensione.

Conclusione: u è somma di un numero finito di funzioni su ciascuna delle quali ha supporto in uno degli intorni del ricoprimento

Ognuno di questi pezzi risolve un'eq. del tipo

$$\Delta u_i = f_i$$

dove f_i è quella che viene fuori tenendo conto che $u_i = u \cdot \phi_i$

↑ i -esima funzione della partizione dell'unità

In ogni caso $\|f_i\|_{L^2(\Omega)}$ si controlla con $C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Step 2 D'ora in poi supponiamo che $\text{supp } u \subseteq \Omega$ e $u=0$ su $\partial\Omega \cap \Omega$.

Idea: spostare u in $\mathbb{Q}^+$ e vedere cosa risolve Poniamo

$$v(y) = u(\phi^{-1}(y))$$

Questa funzione è definita su $\mathbb{Q}^+$ ed è nulla sul bordo di $\mathbb{Q}^+$.

Che cosa risolve $v(y)$? Un'eq. simpatica del tipo

$$\text{div}(\hat{A}(y) Dv) = g$$

dove
$$g(y) = \underbrace{f(\phi^{-1}(y))}_{f \text{ trasportata}} |\text{Det } J\phi^{-1}(y)|$$

$$\hat{A}(y) = A(\phi^{-1}(y)) \quad A(x) = [J\phi(x)] [J\phi(x)]^t \frac{1}{|\text{Det } (J\phi(x))|}$$

Se fosse così abbiamo finito.

In fatti la matrice $\hat{A}(y)$ è ellittica

[fatto generale : M matrice invertibile $\Rightarrow MM^t \geq \nu \text{Id}$]

La regolarità C^2 di ϕ e ϕ^{-1} garantiscono $A \in C^1$.

Inoltre

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{Q}^+)} \leq C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$\uparrow$
dipende
da ϕ

Usando la regolarità in $\mathbb{R}^d_+$ ottengo la regolarità H^2 di v e tornando indietro quella di u .

Step 3 Verifichiamo che v risolve l'equazione data, cioè

$$-\int_{\mathbb{Q}^+} \langle \hat{A}(y) Dv(y), D\psi(y) \rangle dy = \int_{\mathbb{Q}^+} g(y) \psi(y) dy$$

Per ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{Q}^+)$ e anche $\forall \psi \in C_c^2(\mathbb{Q}^+)$.

Poniamo $\varphi(x) = \psi(\phi(x))$ e facciamo il conto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}^+} g(y) \psi(y) dy &= \int_{\mathbb{Q}^+} \underbrace{f(\phi^{-1}(y)) |\text{Det } J\phi^{-1}(y)|}_{g(y)} \underbrace{\psi(\phi^{-1}(y))}_{\varphi(x)} dy \\ &= \int_{u \cap \Omega} f(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

u sd. deb. su $\Omega \cap u$

$$\downarrow$$
$$= - \int_{u \cap \Omega} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = (\star)$$

Voglio scrivere $Du(x)$ in funzione di Dv
 $D\varphi(x)$ " " " $D\psi$

$$u(x) = v(\phi(x)), \text{ quindi } Du(x) = Dv(\phi(x)) J\phi(x)$$

$$\varphi(x) = \psi(\phi(x)), \text{ quindi } D\varphi(x) = D\psi(\phi(x)) J\phi(x)$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle &= Du(x) [D\varphi(x)]^t \\ &= Dv(\phi(x)) J\phi(x) [J\phi(x)]^t [D\psi(\phi(x))]^t \end{aligned}$$

Tornando all'integrale

$$\begin{aligned} (\star) &= - \int_{\mu_n \Omega} Dv(\phi(x)) A(x) [D\psi(\phi(x))]^t | \det J\phi(x) | dx \\ &= - \int_{Q^+} Dv(y) \underbrace{A(\phi^{-1}(y))}_{\hat{A}(y)} [D\psi(y)]^t dy \\ &= - \int_{Q^+} \langle A(y) Dv(y), D\psi(y) \rangle dy \end{aligned}$$

Questo mostra che v risolve quanto richiesto.

Oss. Se all'inizio partivo con $\operatorname{div}(B(x) Du) = f$, andando a rileggere l'eq. in Q^+ trovavo

$$\operatorname{div}(\hat{A}(y) Dv) = g$$

dove

$$\hat{A}(y) = A(\phi^{-1}(y))$$

e

$$A(x) = \frac{J\phi(x) B(x) [J\phi(x)]^t}{|\det(J\phi(x))|}$$

e questa è ellittica se B è ellittica (esercizio di geom. l.)

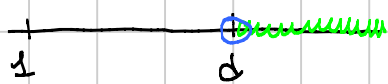
Morale: l'ellitticità si conserva per cambi di variabile.

Domanda (con risposta certa): basta considerare aperti Ω che ammettono un 2-estender?

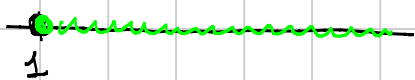
Si traduce in: se $E_2 u$ è l'estesa, e u risolve $\Delta u = f$ in Ω , che cosa risolve $E_2 u$?

— o — o —

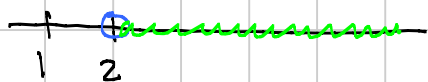
Ultima osservazione sui Sobolev $W^{1,p}$



Posso definire valori puntuali (traccia in codim. 1)



Posso definire la traccia in codim. 1.



Posso definire la traccia in codim. 2

In generale per funzioni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$: se $p > k$, allora posso definire una traccia in codim. k .

Dim: esercizio !!! [Hint nel video]

— o — o —