

METODO DELLE TRASLAZIONI DI NIRENBERG (Rapp. increment.)

Def. (Rapporto incrementale - Derivata discreta)

Data $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, dato $R \in \mathbb{R}^d$ con $R \neq 0$, definiamo

$$D^R u(x) = \frac{u(x+R) - u(x)}{|R|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

(oss.: si estende a $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto per di definire $D^R u(x)$ solo per $x \in \Omega' \subset \Omega$ e $|R|$ abbastanza piccolo)

Caso interessante: $R = \varepsilon e_i$ con $\varepsilon \neq 0$ e e_i della base canonica

Prop. (Proprietà di D^R) L'operatore D^R ha la seguenti proprietà

(1) È lineare

(2) Vale una formula di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^R u(x) dx = + \int_{\mathbb{R}^d} D^{-R} \varphi(x) u(x) dx$$

tutte le volte che hanno senso gli integrali, ad esempio $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

(3) Vale la formula quasi classica per il prodotto

$$D^R(uv)(x) = u(x) D^R v(x) + v(x+R) D^R u(x)$$

(4) se u è di Sobolev, allora $D(D^R u) = D^R(Du)$

↑
gradiente di
Sobolev

Dim (1) Quasi ovvio

$$(2) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\alpha} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{u(x+\alpha) - u(x)}{|\alpha|} dx$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \underbrace{u(x+\alpha)}_{\substack{= \\ y}} dx - \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) u(x) dx$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y-\alpha) u(y) dy$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-\alpha) u(x) dx$$

Mettendo insieme diventa

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\alpha} u(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x-\alpha) - \varphi(x)) u(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} D^{-\alpha} \varphi(x) u(x) dx$$

Oss. Se definisco le derivate discrete direzionali

$$D^{\varepsilon e_i} u(x) = \frac{u(x + \varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon}$$

allora l'int. per parti ha il segno -

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\varepsilon e_i} u(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} D^{-\varepsilon e_i} \varphi(x) u(x) dx$$

(3) Solito trucco

$$\frac{u(x+\alpha) v(x+\alpha) - u(x) v(x)}{|\alpha|} = \frac{u(x+\alpha) v(x+\alpha) - u(x) v(x+\alpha)}{|\alpha|} + \frac{u(x) v(x+\alpha) - u(x) v(x)}{|\alpha|}$$

$$(4) \quad \frac{u(x+a) - u(x)}{a} = \frac{1}{a} Du(x+a) - \frac{1}{a} Du(x) \\ = D^a(Du)(x) \\ \text{--- o --- o ---}$$

Prop. importante (Caratterizzazione dei Sobolev con i rapporti incrementali)

Sia $d \geq 1$ e sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e sia $i \in \{1, \dots, d\}$.

Allora

esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d) \iff \|D^{\varepsilon e_i} u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M \quad \forall \varepsilon \neq 0$$

Inoltre vale la disug.

$$\|D^{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dim. $\Rightarrow$ Dimostro la stima di sotto.

Supponiamo u abbastanza regolare, ad esempio $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Allora ponendo $a = \varepsilon e_i$

$$u(x+a) - u(x) = \psi(a) - \psi(0) \quad \psi(t) := u(x+ta)$$

$$= \int_0^1 \psi'(t) dt \\ = \int_0^1 \langle \nabla u(x+ta), a \rangle dt \\ = \varepsilon \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+ta) dt$$

Metto il valore assoluto

$$|u(x+a) - u(x)| \leq |\varepsilon| \cdot \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+ta) \right| dt \\ \leq |\varepsilon| \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+ta) \right|^2 dt \right\}^{1/2}$$

Faccio il $\square$ e integro in dx :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x+\varepsilon) - u(x)|^2 dx &\leq |\varepsilon|^2 \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_0^1 dt \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+t\varepsilon) \right|^2 \\ &= |\varepsilon|^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\underbrace{x+t\varepsilon}_y) \right|^2 \\ &= |\varepsilon|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^2 dy \end{aligned}$$

Divido per ε^2 e ho la tesi.

$\Leftarrow$ Considero la succ. $D^{\frac{1}{n}ei} u(x)$. È limitata in L^2 , quindi ha s.succ. conv., che non riusciamo

$$D^{\frac{1}{n}ei} u \rightarrow v \quad \text{debole in } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^{\frac{1}{n}ei} u(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) D^{-\frac{1}{n}ei} \varphi(x) dx$$

$\downarrow$ conv. deb. $\downarrow$ unif. a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

Questo dice che v è $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in senso w.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che in realtà

$$D^{\frac{1}{n}ei} u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ forte}$$

— o — o —

Teorema (Regolarità L^2 su tutto lo spazio)

$d \geq 1$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ sol. debole di

$$\Delta u = f.$$

Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ e valgono le stime

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dim. Partiamo dalla def. di sol. debole

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Se vale $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora per approx. vale

$$\forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$$

Invece di moltiplicare per $u_{x_k x_k}$ con $k \in \{1, \dots, d\}$
moltiplico per

$$\underbrace{D^{-R} D^R u(x)}_{\substack{\text{versione discreta di} \\ u_{x_k x_k}}} \quad \text{con } R = \varepsilon e_k$$

Il rhs si tratta al solito modo

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) D^{-R} D^R u(x) dx$$

$$\leq \|f\|_2 \cdot \|D^{-R} D^R u\|_2 \leq \|f\|_2 \|D(D^R u)\|_2$$

$\uparrow$ Prop. conatt. $\uparrow$ tutto il gradiente

vediamo il LHS:

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du(x), D(D^{-R} D^R u) \rangle dx$$

↔
commuto derivate discrete e vere

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du(x), D^{-R} (D D^R u) \rangle dx$$

↑
integrazione per parti

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle D^R Du(x), D D^R u(x) \rangle dx$$

↔

$$= \|D(D^R u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Mettendo insieme

$$\|D(D^R u)\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|D(D^R u)\|_2$$

Questo dimostra (ovviamente nuovamente) che

$$\|D^R(Du)\|_2 \leq \|f\|_2$$

il che mostra che stanno in L^2 tutte le derivate seconde di u che contengono una derivazione rispetto ad x_k

Oss. Serve una integrazione per parti tra funzioni L^2 , che fortunatamente funziona.

Per stimare tutte le derivate seconde servono i passaggi:

Oss. La stessa dimostrazione funziona la derivata al bordo nel caso del semispazio. Basta osservare che $D^{-R} D^R u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ se $R = \sum e_i$ e $i \in \{1, \dots, d-1\}$

— 0 — 0 —