

Teorema (Regolarità L^2 fino al bordo per DBC)

Consideriamo l'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Supponiamo che

- (i) $A(x)$ unif. ellittica
- (ii) $A \in C^1(\operatorname{Clos}(\Omega))$
- (iii) $f \in L^2(\Omega)$ $\uparrow \uparrow$
- (iv) $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole $\uparrow \uparrow$ DBC
- (v) $\partial\Omega$ compatta e di classe C^2 .

Allora $u \in H^2(\Omega)$ e vale la stima che uno si aspetta

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\nu, \Omega) \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|A\|_{C^1(\bar{\Omega})} \}.$$

Oss. Anche di questo vale una versione re-iterata.

— o — o —

REGOLARITÀ INTERNA: CASO BASIC

Proposizione Siano $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

Allora vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dim. Per prepararmi al futuro posto dalla formulazione debole

$$-\int \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Dato $k \in \{1, \dots, d\}$ uso $\varphi = u_{x_k} x_k$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, Du_{x_k} x_k \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f u_{x_k} x_k dx$$

Il RHS lo stimo con C.S.

$$\text{RHS} \leq \|f\|_2 \cdot \|u_{x_k} x_k\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2$$

↑
Qui ci sono tutte le
derivate seconde del
tipo $u_{x_k x_i}$

Nel LHS integro per parti e ottengo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx = \|Du_{x_k}\|_2^2$$

Mettendo insieme trovo

$$\|Du_{x_k}\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2$$

Semplificando ottengo

$$\|Du_{x_k}\|_2 \leq \|f\|_2$$

tutte le derivate seconde di u
a cui ho derivato rispetto ad x_k

Dal momento che vale per ogni k ho la tesi.

— o — o —

Esempio Tocchiamo con mano nel caso $d=2$.

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

Formulazione debole:

$$-\int (\alpha_x \varphi_x + \alpha_y \varphi_y) dx dy = \int f \varphi dx dy$$

Prendo $\varphi = u_{xx}$ e ottengo

$$-\int (\alpha_x u_{xxx} + \alpha_y u_{xxy}) = \int f u_{xx}$$

$\parallel \leftarrow$ scarico una x

$$\begin{aligned} = \int \alpha_{xx}^2 + \alpha_{xy}^2 &= \int f u_{xx} \leq \|f\|_2 \left(\int \alpha_{xx}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_2 \left(\int \alpha_{xx}^2 + \alpha_{xy}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Scegliendo $\varphi = u_{yy}$ guadagno stima su u_{yy}

Proposizione 2 Come sopra (fatto $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) ma l'eq. è

$$\operatorname{div}(A(x)Du) = f$$

Dim Partiamo dalla formulazione debole

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x)Du, D\varphi \rangle = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

e scegliamo $\varphi = u_{x_k x_k}$. Come prima

$$\text{RHS} \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2$$

Al LHS troviamo

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du, Du_{x_k} \rangle dx$$

$\uparrow$ scaricare

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle (A(x) Du)_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A_{x_k}(x) Du, Du_{x_k} \rangle dx}_{\geq -\|A\|_{C^1(\mathbb{R}^d)} \|Du\|_2 \|Du_{x_k}\|_2} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx}_{\geq \nu \int_{\mathbb{R}^d} \langle Du_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx} \\ &= \nu \|Du_{x_k}\|_2^2 \end{aligned}$$

Mettendo insieme viene

$$\nu \|Du_{x_k}\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2 + \|A\|_{C^1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|Du_{x_k}\|_2 \|Du\|_2$$

Questo ci stima $\|Du_{x_k}\|_2$ in termini di $\|f\|_2$, $\|Du\|_2$
(ok perché $u \in H^1$) e norma C^1 di A .

— o — o —

Prop. 3 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque, f e $u \in C^\infty(\Omega)$ soluz. di

$$\Delta u = f \quad (\text{ma vale anche per quella + gen.})$$

Allora per ogni $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$ vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq c(\Omega', \Omega'') \{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')} \}$$

Dim. Sia θ un cutoff tale che $\theta \equiv 1$ in Ω' e
 $\theta \equiv 0$ fuori da Ω''

Pongo $v(x) = u(x) \cdot \theta(x)$ e vedo cosa risolve

$$\Delta v = \Delta u \cdot \theta + u \Delta \theta + 2 \langle \nabla u, \nabla \theta \rangle$$

$$= f \cdot \theta + u \Delta \theta + 2 \langle \nabla u, \nabla \theta \rangle = \hat{f}$$

Ora so che $\Delta v = \hat{f}$ su tutto $\mathbb{R}^d$ quindi

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega')} = \|D^2 v\|_{L^2(\Omega')}$$

$$\leq \|D^2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq d \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

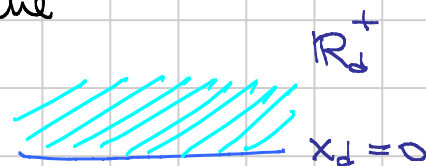
$$= d \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega'')}$$

$$\leq C(\Omega', \Omega'') \{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{L^2(\Omega'')} + \|Du\|_{L^2(\Omega'')} \}$$

Prop 4 (Caso basic di regolarità al bordo con DBC)

Siano u ed f in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}_+^d \\ u(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) &\equiv 0 \end{aligned}$$



$$\text{Allora } \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$$

Dim. Funziona quasi del tutto la dimostrazione prec.

Per $k \in \{1, \dots, d-1\}$ uso nella def. di sol. debole $\varphi = u x_k x_k$ e ottengo

$$\|Du x_k\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \quad k = 1, \dots, d-1$$

Questo stima tutte le derivate seconde tramite $u_{x_d x_d}$
Ma

$$u_{x_d x_d} = \underbrace{\Delta u}_{f \in L^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^{d-1} u_{x_k x_k}}_{\text{so già che stanno in } L^2 !!!}$$

Nella def. di sol. debole

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$$

per approssimazione si estende a tutte le $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$
A me basta che $u_{x_k x_k} \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$

Ora H^1 no pbn, perché $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Questa si annulla su $x_d = 0$ perché è la derivata della traccia che è identicamente nulla.

Per questo NON vale se $k=d$.