

## REGOLARITÀ ELLITTICA

Varie tipologie di eq. di crescente complessità

### 1 Equazioni lineari

#### 1.1 Eq. lineare basic

• Equazione

$$\Delta u = f(x)$$

$$Du = \nabla u$$

• Lagrangiana

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + s f(x)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 + u f(x)$$

• Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

↪ forma integrale di ELE del funzionale associato

#### 1.2 Equazione lineare più generale

• Equazione

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f(x)$$

↪ piccolo abuso di notazione: si pensa  $Du$  come una riga

dove  $A: \Omega \rightarrow M_{d \times d}$  simmetriche.

L'equazione si dice ellittica se esiste  $\nu > 0$  tale che

$$A(x) \geq \nu \operatorname{Id} \quad \forall x \in \Omega$$

• Lagrangiana:  $L(x, s, p) = \frac{1}{2} \langle A(x)p, p \rangle + s f(x)$

• Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle A(x) Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Per maggior chiarezza esplicito con gli indici

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f \quad \leadsto \quad \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f$$

$$A(x) \geq \nu \operatorname{Id} \quad \leadsto \quad \sum_{i,j=1}^d A_{i,j}(x) p_i p_j \geq \nu |p|^2 \quad \forall x \in \Omega, \forall p \in \mathbb{R}^d$$

L'integranda nel LHS della formulazione debole è

$$\sum_{i,j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Esempio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \underset{\uparrow}{7} u_x^2 + (5 + \sin x) \underset{\uparrow}{u_y^2} + \arctan(xy) \underset{\uparrow}{u_x u_y} + e^{x+y} u \right)$$

coeff. forma quadratica

$$A(x,y) := \begin{pmatrix} 7 & \frac{1}{2} \arctan(xy) \\ \frac{1}{2} \arctan(xy) & 5 + \sin x \end{pmatrix}$$

Andare avanti e scrivere (ELE)

1.3 Equazione lineare in tutta generalità

(ELE) di  $L(x,s,p) =$  generico polinomio di 2° grado in  
 $s, p_1, \dots, p_d$  con coeff. dipendenti da  $x$   
 — o — o —

## 2 Equazioni SEMI-LINEARI

Modello  $\Delta u = g(x, u)$   $\Delta u = g(x, u, Du)$

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = g(x, u, Du)$$

Morale: il LHS è come nelle lineari, il RHS è non lineare  
↑ ponte principale (quella con le derivate di ordine superiore)

Caso classico: ELE del funzionale con

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + G(x, s)$$

↑ primitiva di  $g(x, s)$  rispetto ad  $s$

Morale: il funzionale è quadratico nella parte di derivata (gradiente) e arbitrario nella parte di funzione.

## 3 Equazioni QUASI-LINEARI

$$\operatorname{div}(A(x, u, Du) Du) = g(x, u, Du)$$

↑ c'è della non-linearità nella parte principale

(ELE) di tipo del tipo

$$L(x, s, p) = \varphi(p) + G(x, s)$$

↑ strett. convessa o con Hessiano  $\geq \nu Id$

## 4 Equazioni FULLY-NONLINEAR

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0$$

↑ matrice Hessiana

(ad esempio la somma dei 2018 più grandi autovalori di  $D^2u$ )

## Generalità sui teoremi di regolarità

$$\Delta u = f$$

Due tipi :  $\rightarrow$  regolarità interna :  $f \in \text{Spazio}_{loc} \Rightarrow$

$$D^2 u \in \text{Spazio}_{loc}$$

$\rightarrow$  regolarità fino al bordo : stessa cosa senza loc.

## Tipi di teorema nel caso modello

$$\Delta u = f$$

$$f \in L^2_{loc}$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in L^2_{loc}$$

TEORIA

$$f \in L^2$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in L^2$$

$L^2$

$$f \in L^p_{loc}$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in L^p_{loc}$$

$$p \in (1, +\infty)$$

TEORIA

$$f \in L^p$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in L^p$$

$L^p$

$$f \in C^{0,\alpha}$$

$$\Rightarrow$$

$$u \in C^{2,\alpha}$$

$$\alpha \in (0,1)$$

STIME DI

$$f \in C^{k,\alpha}$$

$$\Rightarrow$$

$$u \in C^{k+2,\alpha}$$

SCHAUDER

(con o senza loc)

$$f \in C^k$$

$$\Rightarrow$$

$$u \in C^{k+2}$$

QUESTE SONO

$$f \in L^\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in L^\infty$$

TUTTE

$$f \in L^1$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in L^1$$

FALSE

$$f \in \text{Lip}$$

$$\Rightarrow$$

$$D^2 u \in \text{Lip}$$

— o — o —

Fatto decisivo : la regolarità per l'eq. lineare basic si applica al caso SEMI-LINEARE

Esempio  $\Delta u = \arctan u$  in  $\Omega$  (limitato)

Se  $u \in H^1(\Omega)$  è soluzione debole, allora  $u \in C^\infty(\Omega)$   
 $\uparrow$   
qui posso mettere loc

Pongo  $f(x) = \arctan u(x)$  e osservo che  $f \in L^2(\Omega)$   
quindi  $u \in H^2(\Omega)$  (ho guadagnato derivate seconde)

Ora  $f(x) \in H^2(\Omega)$ , quindi  $u \in H^4(\Omega)$

(Se vale la teoria  $L^2$  re-iterata:  $f \in H^k_{loc} \Rightarrow D^2 u \in H^{k+2}_{loc}$ )

Di questo passo  $u \in H^k(\Omega)$  per ogni  $k$  e questo per le immersioni di Sobolev garantisce  $C^\infty$ .

— o — o —

Teorema (Regolarità  $L^2$  interna)

Consideriamo l'eq. div. più generale

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Supponiamo che

(i)  $A(x)$  sia unif. ellittica ( $A(x) \geq \nu \operatorname{Id}$ )

(ii)  $A \in C^1(\Omega)$

(iii)  $f \in L^2_{loc}(\Omega)$

(iv)  $u \in H^1_{loc}(\Omega)$  sia soluzione debole

Allora  $u \in H^2_{loc}(\Omega)$  e per ogni  $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$  vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq C(\nu, \Omega', \Omega'') \{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')} + \|A\|_{C^1(\Omega'')} \}$$

Versione iterata Stessa cosa con  $A \in C^{k+1}(\Omega)$ ,  $f \in H^k_{loc}(\Omega)$   
e la tesi è  $u \in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$